ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 22 | Oktober 1942 | Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz.

Von *L. Prandtl* in Göttingen.

Zur Einführung für den nachfolgenden Aufsatz von H. Görtler wird ein Überblick über den derzeitigen Stand der Grundformeln der turbulenten Ausbreitung gegeben. Es wird dabei auch zu den von H. Reichardt vorgeschlagenen Ansätzen Stellung genommen.

Die neue Formulierung, die Herr H. Reichardt im Zusammenhang mit seinen verdienstvollen Messungen über die turbulenten Ausbreitungsvorgänge[1]) zur rechnerischen Verfolgung dieser Vorgänge aufgezeigt hat[2]), lädt zu einer Betrachtung der hierdurch gegebenen Gesamtlage ein.

Vor nicht ganz 20 Jahren standen die beiden älteren Ansätze für die scheinbare Schubspannung in einer turbulenten Strömung, der aus strengen mechanischen Gesetzen hergeleitete von Reynolds

$$\tau = -\varrho \overline{u' v'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und der rein phänomenologische von Bousinesq

$$\tau = \varrho \varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

(u', v' = Geschwindigkeitsschwankungen, $\bar{u}$ = zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit, ε ein Maß der Turbulenzstärke, das die Dimension einer kinematischen Zähigkeit hat und deshalb „scheinbare kinematische Zähigkeit der turbulenten Strömung“ genannt werden mag[3])) zunächst ohne Vermittlung nebeneinander. Der Verfasser hat mit seinem Mischungswegansatz erstmalig eine Brücke zwischen den beiden Formeln geschlagen[4]). Die primitivste Formulierung ergab für die Bousinesqsche scheinbare kinematische Zähigkeit ε die Beziehung

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

l war eine neu eingeführte Länge, der „Mischungsweg“, dessen Größe in einem Einzelfall mit Hilfe von (3) aus Messungen der Geschwindigkeitsverteilung und Ermittlungen über die Schubspannung τ gewonnen werden konnte. Wesentlich dabei war, daß in dem Falle, wo die turbulente Strömung einen mit der Geschwindigkeit quadratischen Widerstand erzeugt, l unabhängig von dem Betrag der Geschwindigkeit, also eine reine Ortsfunktion wurde.

[1]) Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. VDI-Forschungsheft 414. Berlin 1942.

[2]) Ebenda, vgl. auch seine frühere Mitteilung in Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 257—264 „Über eine neue Theorie der Turbulenz“.

[3]) Das Produkt $\varrho\varepsilon$ ist identisch mit dem von Wilh. Schmidt in die meteorologischen Betrachtungen eingeführten Begriff „Austausch“, vgl. sein Buch „Der Austausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen“, Hamburg 1925.

[4]) Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 136.

Formel (3) hat jedoch, abgesehen davon, daß diese Ortsfunktion vielfach keinen genügend einfachen Verlauf zeigt, noch das Unbefriedigende an sich, daß dort, wo $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ Null wird, also am Ort eines Maximums oder Minimums von $\bar{u}$, bei endlichem l die scheinbare Zähigkeit Null wird. Dies kommt auch in den an diesen Stellen unnatürlich zugespitzten Geschwindigkeitsverteilungen, die bei regulärem Verlauf von $\tau(y)$ und l mit dieser Formel erhalten werden, zum Ausdruck. Der Verfasser hat deshalb schon in der erwähnten ersten Veröffentlichung einen Ausweg vorgeschlagen, der darauf hinauskommt, daß man die Formel (3) nicht auf den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit, sondern auf die augenblickliche Geschwindigkeit anwendet, deren Maximum wegen der Schwankungen nach Zufall seitlich verlagert wird, und daß man von diesen Augenblickswerten von ε nun an jeder Stelle den quadratischen Mittelwert bildet. Führt man eine weitere Länge l' ein, die positiv oder negativ sein kann und zeitlich nach Zufallsgesetz variiert, so kann man in erster Näherung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l' \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

setzen. Der erwähnte Mittelwert ist dann

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \overline{l'^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Formel, die aus Formel (3) entsteht, wenn an Stelle von $\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|$ der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) eingeführt wird, den Versuchstatsachen weitgehend gerecht wird. Man kann allerdings dagegen auch einwenden, daß jetzt zwei empirische Größen zur Verfügung stehen, mit denen man sich natürlich einem gegebenen Versuchsmaterial besser anpassen kann als mit einer einzigen. Die verbesserte Formel ist freilich für die wirkliche Durchführung analytischer Rechnungen sehr unbequem, so daß der Verfasser in der Zwischenzeit öfters Versuche gemacht hat, für praktische Zwecke eine bequemere Formulierung zu finden. Das neue Versuchsmaterial, das inzwischen Herr H. Reichardt erarbeitet hat, ließ diese Gedankenreihe wieder aufleben und ermunterte zu einem neuen Anlauf in dieser Richtung. Als Ergebnis dieses Suchens ergab sich ein Ansatz, der, wie gleich betont werden mag, ziemlich roh ist, dessen Wert aber in seiner Einfachheit und Handlichkeit liegt, durch die es gelingt, auf einfacherem Wege als es mit dem Ansatz (3) möglich ist[5]), die wichtigsten formelmäßigen Beziehungen zur Theorie der freien Turbulenz zu gewinnen. Die Einfachheit hat natürlich einen Verzicht an Genauigkeit in den Einzelheiten im Gefolge.

Bei dem in Rede stehenden Ansatz ist davon ausgegangen, daß die einzelnen Flüssigkeitsteile, die bei der turbulenten Vermischung quer zur Strömungsrichtung wandern, durchaus nicht, wie es der Ansatz (3) annahm, sozusagen differentieller Natur sind, sondern daß sie vielmehr in ihrer Größenordnung an die Querabmessung der Vermischungszone heranreichen. Es wird deshalb eine scheinbare kinematische Zähigkeit in der Weise gebildet, daß der maximale Geschwindigkeitsunterschied der gemittelten Strömung mit einer passenden aus der Breite der Vermischungszone entnommenen Länge multipliziert wird, wozu noch ein Zahlenfaktor kommen muß, dessen Wert aus den Versuchen bestimmt wird. Es wird also gesetzt

$$\varepsilon = \varkappa\, b\, (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Aus diesem Ansatz ergibt sich unmittelbar, daß ε über den einzelnen Querschnitt konstant gesetzt ist, während es nach Formel (3) über den Querschnitt veränderlich wird, wenn, wie gewöhnlich, l konstant angenommen wird. Besonders große Abweichungen gegenüber den älteren Rechnungen werden am Rande der Vermischungszone zu erwarten sein, da nach Formel (3) wie auch nach Formel (5) ε dort gegen Null geht. Die Versuchsergebnisse weisen in die gleiche Richtung[6]).

Die Durchführung einiger Aufgaben mit Hilfe des Ansatzes (6) hat auf Wunsch des Verfassers Herr H. Görtler übernommen[7]). Seine Rechnungen, die auch einiges mathematisches Interesse bieten, und ein Vergleich ihrer Ergebnisse mit den Reichardtschen Messungen finden sich in seinem hier anschließenden Aufsatz.

[5]) Vgl. etwa die zum Teil ziemlich verwickelten Rechnungen von Herrn W. Tollmien, Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926), S. 468—478.

[6]) Vgl. auch die Reichardtschen Ausführungen über den Verlauf der Austauschfunktion der freien Turbulenz in dem demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Aufsatz „Über Impuls- und Wärmeaustausch in freier Turbulenz".

[7]) Hier ist anzumerken, daß Herr Reichardt, ohne daß es dem Verfasser bekannt war, den Ansatz (6) zur gleichen Zeit auch in Erwägung gezogen hat und zwei einfache Beispiele dafür gerechnet hat, ihn dann aber zugunsten seines veröffentlichten Ansatzes wieder verworfen hat, da dieser die Versuchsergebnisse mit höherer Genauigkeit wiedergibt. (Die erwähnten Beispiele betrafen die ebene Strahlausbreitung und den ebenen Nachlauf, vgl. das zweite und dritte Beispiel von Herrn Görtler.)

Zu den Reichardtschen Betrachtungen sei zur Orientierung des Lesers das Folgende ausgeführt:

In seinen „Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz“ werden die bei freier Turbulenz bisher beobachteten Geschwindigkeitsprofile kritisch gesichtet und besonders sorgfältige eigene Messungen hinzugefügt. Andererseits wird unter Ausnützung aller theoretisch-hydrodynamischen Beziehungen die Aufgabe gelöst, die praktisch nicht meßbaren Größen, wie die Quergeschwindigkeit und die in der scheinbaren Schubspannung nach (1) auftretende Größe $\overline{u'v'}$, aus den allein gemessenen Gesamtdruckprofilen $\overline{u^2}(y)$ rechnerisch zu ermitteln, wobei einerseits „ausgebildeter Strömungszustand“, d. h. Affinität der Geschwindigkeitsprofile in allen Abständen x des Bereiches, vorausgesetzt und in erster Näherung Druckkonstanz angenommen wird. Aus den Versuchen ergibt sich, daß die Gesamtdruckprofile mit recht guter Annäherung durch Fehlerfunktionen (bzw. Fehlerintegralfunktionen) dargestellt werden können. Damit können die in dem erwähnten Formelsystem auftretenden Differentiationen und Integrationen bequem ausgeführt und so die nicht meßbaren Größen ermittelt werden.

In einem weiteren Schritt hat nun Herr Reichardt ein einfaches System von Differentialformeln aufgestellt, durch das alle bisher untersuchten Fälle von freier Turbulenz zusammengefaßt werden konnten. Die erste dieser Gleichungen ist bekannt. Sie wird aus der Eulerschen Gleichung für eine volumbeständige Flüssigkeit durch Bildung der zeitlichen Mittelwerte erhalten und bildete schon die Grundlage der alten Reynoldsschen Betrachtungen. Sie lautet für ebene Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{p}}{\varrho}+\overline{u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u\,v})=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Bei der freien Turbulenz kann in (7), wie auch sonst üblich, in erster Näherung $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}=0$ gesetzt werden, wodurch die Gleichung zu einer „Kontinuitätsgleichung des u-Impulses“ wird. Hierzu fügt Reichardt eine zweite Gleichung hinzu, die phänomenologischen Charakter trägt und die lautet:

$$\overline{u\,v}=-\Lambda\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u^2}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Hierin spielt offenbar die „Übertragungsgröße“ Λ (eine Länge, die aber nicht mit dem Mischungsweg identisch ist) eine ähnliche Rolle wie die scheinbare kinematische Zähigkeit ε in Gl. (2). Aus Gl. (7) und (8) läßt sich $\overline{u\,v}$ fortschaffen und es bleibt dann

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u^2})=\Lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{u^2}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

was bei $\Lambda=\text{const.}$ mit der partiellen Differentialgleichung der eindimensionalen nicht stationären Wärmeleitung übereinstimmt, wenn an Stelle von x die Zeit t tritt und y die räumliche Entfernung bedeutet. Die Fehlerfunktion und das Fehlerintegral gehören bekanntermaßen zu den Lösungsfunktionen dieser Gleichung. Bei der Turbulenzaufgabe ist Λ im allgemeinen nicht konstant, sondern eine Funktion von x, deren Bau sich durch einfache Impulsbetrachtungen od. dgl. aus der Forderung der Affinität der Geschwindigkeitsprofile herleiten läßt.

Der Verfasser fand es seinerzeit bedenklich, daß in Gl. (9) nicht die Beschleunigung $\frac{\partial(\overline{u^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u\,v})}{\partial y}$, sondern nur $\frac{\partial(\overline{u})^2}{\partial x}$ stand, was die x-Achse unerwünschterweise auszeichnete. Er empfand dies als eine Verletzung der Newtonschen Relativität, nach der die Kräfte in einem mechanischen System von der Zufügung einer konstanten Geschwindigkeit (hier einer solchen in der y-Richtung) unabhängig sein müssen. In (8) hätte man deshalb eher den von einer konstanten Zusatzgeschwindigkeit unabhängigen Ausdruck $\overline{u'v'}$ erwarten sollen als $\overline{u\,v}=\overline{u}\,\overline{v}+\overline{u'v'}$. Auch Herr Reichardt gibt an, daß er das Hinzutreten von $\overline{u}\,\overline{v}$ als merkwürdig empfand. Der bei Reichardt angegebene Funktionsverlauf von $\overline{u\,v}$ und $\overline{u'v'}$ zeigt jedoch, daß man das Glied $\overline{u}\,\overline{v}$ nicht entbehren kann, wenn man die Fehlerfunktion für die Gesamtdruckverteilung erhalten will. In den Reichardtschen Beispielen ist allerdings jedesmal eine bestimmte Strömungsrichtung durch die Problemstellung ausgezeichnet, die dann folgerichtig als x-Richtung definiert wird, so daß die nachträgliche Zufügung einer konstanten v-Geschwindigkeit nicht mehr in Betracht gezogen werden darf. Herr Reichardt beruft sich auch im Hinblick auf den Erfolg seiner Rechnungen mit einem gewissen Recht hierauf; wenn man aber an allgemeinere Beispiele denkt, z. B. an Nachlauf oder auch Strahlausbreitung in einer gekrümmten Strömung, dann wird man andere Wege gehen müssen. Die Ansätze, die von der scheinbaren Schubspannung ausgehen, sind von diesem Einwand frei (erfordern aber freilich eine Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen!). 419

Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes.

Von *H. Görtler* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Es werden einige Probleme der freien Turbulenz auf Grund des in den vorangehenden Darlegungen von L. Prandtl erörterten neuen Näherungsansatzes: „Austausch über den einzelnen Querschnitt konstant und proportional dem Produkt aus Geschwindigkeitsunterschied und Vermischungsbreite" durchgerechnet. In allen behandelten Fällen ergibt sich gute Übereinstimmung der berechneten Geschwindigkeitsverteilungen mit den Beobachtungen, abgesehen natürlich von den unmittelbaren Randgebieten der Vermischungszonen, wo ja der Austausch in Wirklichkeit erlischt.

Auf Anregung von Professor Prandtl werden im folgenden einige Probleme der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes für die scheinbare Schubspannung in einer turbulenten Strömung:

$$\tau = \varrho\,\varepsilon\,\frac{\partial \bar u}{\partial y} \quad \ldots \quad (1)$$

mit

$$\varepsilon = \varkappa\, b\,(\bar u_{\max} - \bar u_{\min}) \quad \ldots \quad (2)$$

durchgerechnet, ($\bar u$ zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit, ε scheinbare kinematische Zähigkeit, b Maß für die Breite der Vermischungszone, $\varkappa$ dimensionsloser Proportionalitätsfaktor), d. h. die kinematische Zähigkeit wird über den einzelnen Querschnitt konstant angenommen. Wie Professor Prandtl in seinen diesem Aufsatz vorangehenden Darlegungen ausgeführt hat, ist zu erwarten, daß gegenüber dem alten Ansatz

$$\varepsilon = l^2 \left|\frac{\partial \bar u}{\partial y}\right| \quad \ldots \quad (3),$$

der in den Extremstellen von $\bar u$ zu unnatürlich zugespitzten Profilen geführt hat, weil dort nach (3) ε verschwindet, der Ansatz (2) im Inneren der Vermischungszone zu guter Übereinstimmung mit dem wirklichen Verlauf führen wird, daß aber am Rande der Vermischungszone Abweichungen zu erwarten sind, weil dort der Austausch in Wirklichkeit erlischt. Dies wird durch die folgenden Rechnungen bestätigt. Um der Rechnung Grenzen zu setzen, habe ich mich auf die interessierenden ebenen Probleme der freien Turbulenz beschränkt.

1. Die ebene Vermischungszone zweier Strahlen.

Zwei Parallelstrahlen mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit U_1 bzw. U_2 mögen durch eine Wand (negative x-Achse, siehe Bild 1) getrennt sein, die in $x=0$ abbricht, so daß sich von hier an eine turbulente Vermischungszone der beiden Strahlen ausbildet. Gefragt ist nach der Verteilung der mittleren Geschwindigkeit für $x>0$.

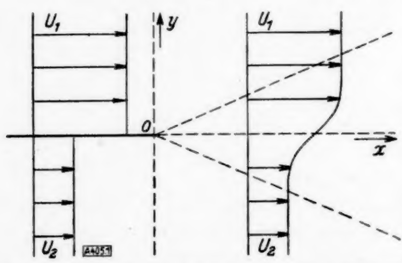


Bild 1. Ebene Vermischungszone zweier Strahlen.

Wie in allen folgenden Beispielen soll der Druck in erster Näherung als konstant angesehen werden. Die Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsbedingung lauten dann allgemein:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.1),$$

wobei wir der Einfachheit halber den Querstrich bei $\bar u$, $\bar v$ hier und im folgenden fortlassen. u bedeutet also den zeitlichen Mittelwert an der betreffenden Stelle.

Im vorliegenden Fall ist aus dimensionsanalytischen Gründen $b = c\,x$, wo c eine Konstante bezeichnet, und somit

$$\varepsilon = \varkappa\,(U_1 - U_2)\,c\,x \qquad (U_1 \geqq U_2) \quad \ldots \quad (1.2).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u und v sind als reine Funktionen von $\eta = y/x$ anzusetzen.

Führen wir zur Befriedigung der Kontinuitätsgleichung die Stromfunktion ψ vermöge $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ein und setzen wir

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \quad \ldots \quad (1.3),$$

so hat ψ die Gestalt

$$\psi = x\, U\, F(\eta) \quad \ldots \quad (1.4).$$

Es ist dann

$$\frac{u}{U} = F'(\eta), \quad \frac{v}{U} = -F + \eta F' \quad \ldots \quad (1.5),$$

und durch Einsetzen in die nun allein noch zu befriedigende erste Gl. (1.1) ergibt sich als Differentialgleichung[1]) für F:

$$F''' + 2\sigma^2 F F'' = 0 \quad \ldots \quad (1.6),$$

wo

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa c \lambda}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \quad \ldots \quad (1.7).$$

An Randbedingungen ist zu fordern:

$$F'(\eta) = \begin{cases} 1 + \lambda & \text{für } \eta = \infty, \\ 1 - \lambda & \text{für } \eta = -\infty \end{cases} \quad \ldots \quad (1.6\text{a}),$$

damit u die vorgegebenen Werte außerhalb der Vermischungszone annimmt. Gleichzeitig wird $v = \text{const}$ für $\eta = \pm\infty$.

Für unsere Ausführungen erweist es sich als zweckmäßig, an Stelle von η als unabhängige Veränderliche endgültig

$$\xi = \sigma \eta \quad \ldots \quad (1.8)$$

einzuführen. Wir machen dann für F den Reihenansatz[2])

$$F = \sigma^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu F_\nu(\xi) \quad \text{mit} \quad F_0(\xi) = \xi \quad \ldots \quad (1.9).$$

Setzt man diese Reihe in (1.6) ein, so ergibt der Koeffizientenvergleich gleicher λ-Potenzen das folgende rekursiv zu lösende System von Differentialgleichungen für die Beiwertfunktionen $F_\nu(\xi)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $F_0 = \xi$), in welchem Striche Ableitungen nach ξ anzeigen:

$$\left.\begin{aligned} &F_1''' + 2\xi F_1'' = 0, \\ &F_2''' + 2\xi F_2'' = -2 F_1 F_1'', \\ &F_3''' + 2\xi F_3'' = -2\{F_1 F_2'' + F_2 F_1''\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.10)$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &F_1'(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi = \infty, \\ -1 & \text{für } \xi = -\infty; \end{cases} \\ &F_\nu'(\xi) = 0 \quad \text{für } \xi = \pm\infty, \quad \nu \geqq 2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.10\text{a}).$$

Es bleibt dann in den Lösungen F_1, F_2, ... eine additive Konstante willkürlich. Die Tatsache, daß hier eine Unbestimmtheit in der Lösung des Problems bestehen bleibt, ist nur Ausdruck einer grundsätzlichen Unbestimmbarkeit der Lösungen der Grenzschichtdifferentialgleichung. Wir kommen später darauf zurück.

Zunächst berechnet sich F_1 unter Erfüllung der Randbedingungen (1.10a) zu

$$F_1 = \int_0^\xi \Phi(\alpha)\, d\alpha + d_1 \quad \ldots \quad (1.11),$$

wo

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\beta^2}\, d\beta$$

das Fehlerintegral und d_1 eine Integrationskonstante bezeichnen.

---

[1]) Diese Differentialgleichung liegt auch der Berechnung der laminaren Grenzschicht an der Platte zugrunde, natürlich bei anderen Randbedingungen, siehe H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1 bis 37. Ich schlage zur Lösung jedoch einen anderen Weg ein, der hier wesentlich einfacher zum Ziele führt.

[2]) Dieser Reihenansatz entspricht folgender Iteration: Man gehe aus von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $u = (U_1 + U_2)/2 = U$ und also von $F = F^{(0)} = \eta\ (\equiv \sigma^{-1} F_0)$ als nullter Näherung. Für eine erste Verbesserung $F = F^{(0)} + F^{(1)}$ bestimmt sich die Korrektur $F^{(1)}$ unter Vernachlässigung quadratischer Glieder in $F^{(1)}$ und in dessen Ableitungen aus $F^{(1)'''}(\eta) = -2\sigma^2 \eta F^{(1)''}(\eta)$. Dabei muß $F^{(1)}$ das Verhalten von u für $\eta = \pm\infty$ in Ordnung bringen ($u = U_1$ bzw. $= U_2$). Durch Fortführung dieses Iterationsprozesses gelangt man zur Reihe (1.9).

Für die weiteren Gleichungen des Systems (1.10) wählen wir zweckmäßig die Schreibweise

$$F_\nu''' + 2\xi F_\nu'' = \Phi_1(\xi) R_\nu(\xi) \quad (\nu \geqq 2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.12),$$

indem wir den Faktor

$$\Phi_1(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

(Fehlerfunktion) rechts herausziehen. Dann ist das Integral F_ν'' von (1.12) formal

$$F_\nu'' = \Phi_1(\xi) \int_0^\xi R_\nu(a)\,\mathrm{d}a + C_\nu \Phi_1(\xi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.13\text{a})$$

und somit durch Quadraturen hieraus

$$\left.\begin{aligned} F_\nu' &= \int_0^\xi \Phi_1(\beta) \int_0^\beta R_\nu(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta + C_\nu \Phi(\xi) + D_\nu, \\ F_\nu &= \int_0^\xi \int_0^\gamma \Phi_1(\beta) \int_0^\beta R_\nu(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma + C_\nu \int_0^\xi \Phi(a)\,\mathrm{d}a + D_\nu \xi + d_\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.13\text{b}).$$

C_ν, D_ν und d_ν $(\nu \geqq 2)$ sind Integrationskonstanten, die mit dem ebenfalls noch unbestimmten d_1 festgelegt werden müssen. Dies und die rekursive Ausrechnung der Hilfsfunktionen $R_\nu(\xi)$ für den Formelapparat (1.13) ist die allein noch zu bewältigende Aufgabe. Es sind $\Phi(\xi)$ und $\Phi_1(\xi)$ bekannte tabulierte Funktionen[3]). Zur Berechnung der R_ν hat man dann, wie sich zeigen wird, nur noch Quadraturen auszuführen, und dasselbe gilt nach (1.13) dann auch für die interessierenden Größen des Strömungsfeldes. Dies bedeutet für das numerische Rechnen einen erheblichen Vorteil.

Die Integrationskonstanten C_ν, D_ν und d_ν sind vollkommen festgelegt, wenn wir neben den Randbedingungen (1.10a) noch etwa fordern, daß $u(0) = U$, d. h. $F'(0) = 0$, also

$$F_\nu(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.10\text{b}).$$

Daß diese Forderung keine unerwünschte Einschränkung unserer Betrachtungen bedeutet, wird noch ersichtlich werden. Für $\nu = 1$ ist bereits von selbst $F_1'(0) = 0$ erfüllt.

Es wird nun zunächst

$$R_2 = -2F_1(\xi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.14),$$

wobei F_1 nach (1.11) bis auf eine additive Konstante d_1 bekannt ist. Setzen wir diesen Ausdruck in (1.13) ein, so erhalten wir

$$F_2'(\xi) = -2\int_0^\xi \Phi_1(\gamma) \int_0^\gamma \int_0^\beta \Phi(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma + d_1 \left\{\Phi_1(\xi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} + C_2 \Phi(\xi) + D_2 \quad \ldots \quad (1.15)$$

$\left(\text{wobei die Beziehung } \int_0^\xi \Phi_1(a)\, a\,\mathrm{d}a = -\frac{1}{2}\left\{\Phi_1(\xi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} \text{ benutzt wurde}\right)$. Da die beiden ersten Ausdrücke gerade Funktionen in ξ darstellen, folgt aus $F_2'(\pm\infty) = 0$, daß

$$C_2 = 0, \quad D_2 = 2\int_0^\infty \Phi_1(\gamma) \int_0^\gamma \int_0^\beta \Phi(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma + \frac{2}{\sqrt{\pi}} d_1 \quad \ldots \ldots \quad (1.16).$$

Wegen $F_2'(0) = 0$ muß ferner

$$D_2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.17)$$

sein, also

$$d_1 = -\sqrt{\pi} \int_0^\infty \Phi_1(\gamma) \int_0^\gamma \int_0^\beta \Phi(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma = -0{,}1608\ ^{4)} \quad \ldots \ldots \quad (1.18).$$

(Es gilt allgemein, daß d_ν erst mit $C_{\nu+1}$, $D_{\nu+1}$ durch die Randbedingungen für $F_{\nu+1}'(\xi)$ bestimmt wird.)

Für $\nu = 3$ ergibt sich zunächst wegen

$$\Phi_1 R_3 = -2\{F_1 F_2'' + F_2 F_1''\}$$

$$R_3(\xi) = -2 d_2 \Phi_1(\xi) + 4 F_1(\xi) \int_0^\xi F_1(a)\,\mathrm{d}a + 4\int_0^\xi \int_0^\gamma \Phi_1(\beta) \int_0^\beta F_1(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \quad \ldots \quad (1.19).$$

---

[3]) E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln, 2. Aufl. Leipzig 1933, S. 97 ff.

[4]) Hier und im folgenden wurden die Integrationen graphisch ausgeführt.

Wegen

$$F_3' = \int_0^{\xi} \Phi_1(\beta) \int_0^{\beta} \bar{R}_3(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta - 2 d_2 \int_0^{\xi} \Phi_1(\alpha)\, \Phi(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + C_3\, \Phi(\xi) + D_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.20)$$

mit $R_3 = \bar{R}_3 - 2 d_2 \Phi_1(\xi)$, ergibt die Forderung $F_3'(0) = 0$ zunächst

$$D_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.21),$$

und $F_3'(\pm\infty) = 0$ kann nur befriedigt werden, wenn der 2. Term als gerade Funktion verschwindet, also

$$d_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.22),$$

da ja die übrigen Terme ungerade Funktionen in ξ sind, und wenn

$$C_3 = -\int_0^{\infty} \Phi_1(\beta) \int_0^{\beta} R_3(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta = 0{,}03800 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.23).$$

In dieser Weise kann man bequem fortfahren. Es möge noch das Glied mit $\nu = 4$ berechnet werden. Es wird sich zeigen, daß die Konvergenz der Entwicklung auch im ungünstigsten Falle so gut ist, daß dieses Glied und im allgemeinen bereits F_3 praktisch keine Beiträge mehr liefern.

Da $\Phi_1 R_4 \equiv -2\,\{F_1 F_3'' + F_3 F_1'' + F_2 F_2''\}$ ist, wird

$$R_4 = -2\left\{F_1 \int_0^{\xi} R_3(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + C_3 F_1 + F_3 - 2 F_2 \int_0^{\xi} F_1(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.24),$$

wobei F_3 die noch unbekannte Konstante d_3 enthält. Wegen

$$F_4' = \int_0^{\xi} \Phi_1(\beta) \int_0^{\beta} \bar{R}_4(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta - 2 d_3 \int_0^{\xi} \Phi_1(\alpha)\, \Phi(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + C_4\, \Phi(\xi) + D_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.25)$$

mit $R_4 = \bar{R}_4 - 2 d_3 \Phi_1(\xi)$, schließt man zunächst aus $F_4'(0) = 0$, daß

$$D_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.26)$$

sein muß, und aus $F_4'(\pm\infty) = 0$, daß die ungerade Funktion $C_4\, \Phi(\xi)$ verschwinden, also

$$C_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.27)$$

sein muß, da die übrigen Glieder gerade Funktionen in ξ sind, und daß

$$d_3 = \int_0^{\infty} \Phi_1(\beta) \int_0^{\beta} \bar{R}_4(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta \Big/ \int_0^{\infty} \Phi_1(\alpha)\, \Phi(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = -0{,}001745 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.28)$$

ist. Die noch unbestimmte Integrationskonstante d_4 in F_4 würde sich erst bei Ermittlung von F_5 ergeben. Man überlegt sich jedoch leicht, daß $d_4 = 0$ ist.

Zahlentafel 1.

ξ	F_1	F_1'	F_1''	F_2	F_2'	F_2''	F_3	F_3'	F_3''	F_4	F_4'	F_4''
0	−0,161	0	1,128	0	0	0	−0,002	0	0,043	0	0	0
0,2	−0,139	0,223	1,084	0,000	0,007	0,007	−0,001	0,008	0,035	0,000	0,000	0,003
0,4	−0,073	0,428	0,962	0,003	0,025	0,010	0,001	0,013	0,015	0,000	0,001	0,004
0,6	0,031	0,604	0,787	0,010	0,044	0,009	0,004	0,013	−0,013	0,000	0,002	0,002
0,8	0,166	0,742	0,595	0,021	0,058	0,005	0,006	0,008	−0,037	0,001	0,002	0,001
1,0	0,328	0,843	0,415	0,033	0,062	−0,001	0,007	−0,001	−0,047	0,001	0,002	0,003
1,2	0,503	0,910	0,267	0,045	0,056	−0,005	0,006	−0,009	−0,039	0,002	0,003	0,007
1,4	0,690	0,952	0,159	0,055	0,044	−0,007	0,004	−0,015	−0,019	0,003	0,005	0,010
1,6	0,883	0,976	0,087	0,062	0,030	−0,006	0,000	−0,017	0,002	0,004	0,007	0,008
1,8	1,080	0,989	0,044	0,067	0,019	−0,005	−0,002	−0,015	0,013	0,005	0,008	0,002
2,0	1,278	0,995	0,021	0,070	0,010	−0,003	−0,005	−0,011	0,019	0,007	0,008	−0,005
2,2	1,477	0,998	0,009	0,071	0,005	−0,002	−0,007	−0,007	0,017	0,008	0,006	−0,009
2,4	1,677	0,999	0,004	0,072	0,002	−0,001	−0,008	−0,004	0,012	0,009	0,005	−0,009
2,6	1,877	1,000	0,001	0,072	0,001	0,000	−0,009	−0,002	0,008	0,010	0,003	−0,008
2,8	2,077	1,000	0,000	0,072	0,000	0,000	−0,009	−0,001	0,004	0,010	0,002	−0,005
3,0	2,277	1,000	0,000	0,072	0,000	0,000	−0,009	0,000	0,002	0,011	0,001	−0,003

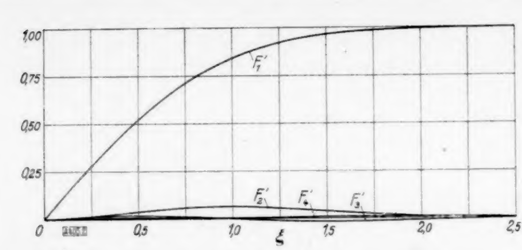


Bild 2. Ebene Vermischungszone zweier Strahlen: Verlauf der Funktionen $F_\nu'(\xi)$ für $\nu = 1, 2, 3, 4$. Es ist ferner $F_0' = 1$.

Die numerische Auswertung unserer Ergebnisse liefert die Zahlentafel 1 für F_ν, F_ν' und F_ν'' ($\nu = 1, 2, 3, 4$; für $\nu = 0$ ist $F_0 = \xi$). Es ist dabei zu beachten, daß F_ν, $F'_{\nu+1}$, F_ν'' gerade oder ungerade Funktionen von ξ sind, je nachdem ν ungerade oder gerade ist. Auf Grund dieser Tafel berechnet man $u(\xi)$ vermöge

$$\frac{u(\xi)}{U} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu F_\nu'(\xi) \quad . \quad . \quad (1.29),$$

wobei $0 \leq \lambda \leq 1$. Im Falle $U_2 = 0$ (Vermischungszone zwischen Strahl und ursprünglich ruhender Luft) ist $\lambda = 1$. Selbst in diesem für die Konvergenzgüte ungünstigsten Fall liefern die Glieder F_3' und F_4' keine wesentlichen Beiträge mehr (siehe Bild 2). Um so mehr trifft dies zu, wenn $\lambda < 1$ ist, da die Potenzen λ^ν die Güte der Konvergenz verbessern gegenüber dem Fall $\lambda = 1$. Entsprechend ist

$$\frac{v(\xi)}{U} = \sigma^{-1} \left\{ \xi \frac{u(\xi)}{U} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu F_\nu(\xi) \right\},$$

$$\psi = x \{\sigma^{-1} \xi u - v\}.$$

Wir schreiben $\frac{v(\xi)}{U} = \sigma^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu v_\nu(\xi)$, und zeigen in Bild 3 die Funktionen $v_\nu(\xi)$ für $\nu = 1, 2, 3, 4$.

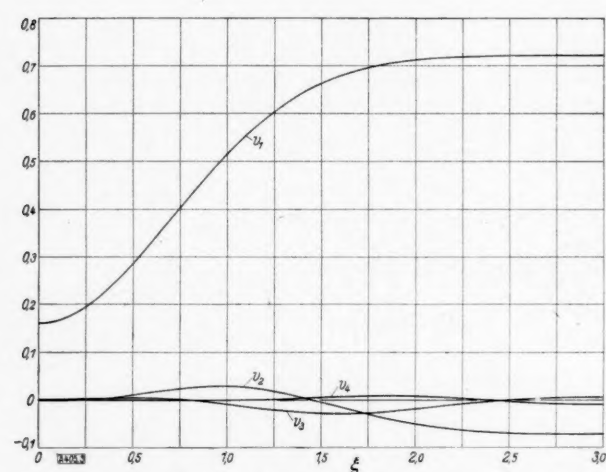


Bild 3. Ebene Vermischungszone zweier Strahlen: Verlauf der Funktionen $v_\nu(\xi)$ für $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Nun noch ein Wort zur Unbestimmtheit der Lösung, welche oben durch die zusätzliche Forderung $u(0) = U$ willkürlich behoben wurde. Es ist eine wohlbekannte Eigenschaft der Grenzschichtdifferentialgleichungen[5])

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

daß mit einer Lösung $u(x, y)$, $v(x, y)$ auch

$$u^*(x, y) = u(x, y + f(x))$$

und das zugehörige $v^*(x, y)$ auf Grund der Kontinuitätsgleichung:

$$v^*(x, y) = v(x, y + f(x)) - f'(x)\, u(x, y + f(x))$$

eine Lösung darstellen. Das gilt nicht nur im laminaren Fall, wo $\varepsilon = \nu = \text{const}$ ist, sondern auch im vorliegenden Falle des turbulenten Austausches, wo $\varepsilon = \varepsilon(x)$ im allgemeinen variabel ist.

In Fällen wie dem vorliegenden, in welchen eine bestimmte Stromlinie nicht vorgegeben ist, bleibt mithin die Lösung bis zu einem gewissen Grade unbestimmt. Die einleitend gestellte Forderung, daß $v/u = \text{const}$ für $y = \pm\infty$ sein soll, ergibt $f(x) = a\,x$ (a eine Konstante). Wegen $\xi = \sigma y/x$ ist somit neben der von uns hergestellten Lösung $u(\xi)$, $v(\xi)$ auch

$$u^*(\xi) = u(\xi + \sigma a), \quad v^*(\xi) = v(\xi + \sigma a) - a\,u(\xi + \sigma a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.30)$$

eine Lösung. Man erkennt leicht, daß die in unserer obigen Rechnung zutage getretene Unbestimmtheit gerade diese Willkür zum Ausdruck bringt. Mit der zusätzlichen Forderung: $u(0) = U$ haben wir somit lediglich das Geschwindigkeitsprofil $u(\xi)$ gegenüber noch freien

[5]) Siehe L. Prandtl: Zur Berechnung der Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 77 bis 82.

kleinen Verschiebungen in ξ, also gegenüber kleinen Drehungen der Vermischungszone um den Ursprung $x = y = 0$, festgelegt[6]). Auf die Gestalt des Profiles $u(\xi)$ hat dies natürlich keinen Einfluß.

Die Forderung $u(0) = U$ ist lediglich gewählt worden, weil sie die Konvergenz unserer Entwicklungen besonders begünstigt. Denn es ist ja $u = U\,(1 + \lambda F_1'(\xi) + \lambda^2 F_2'(\xi) + \ldots)$, und da von selbst $F_1'(0) = 0$ ausfällt, müßten die höheren Näherungen F_2', F_3', ... die Korrektur für jede Verschiebung des Profils $u(\xi)$ aus der durch $u(0) = U$ gekennzeichneten Lage zusätzlich aufbringen. So aber, indem wir $u(0) = U$ fordern, bringen die höheren Näherungen nur noch kleine Korrekturen am Rande der Vermischungszone (siehe Bild 2), während der mittlere Teil schon durch die ersten Glieder der Reihe gut wiedergegeben wird.

Man hätte unter Verzicht auf die gute Konvergenz statt $u(0) = U$ auch z. B. $v(0) = 0$ fordern können, d. h. die Gerade $y = 0$ zur Stromlinie machen können. Hieraus wird ersichtlich, daß in jeder Vermischungszone zweier paralleler Strahlen die von $x = 0$, $y = 0$ ausgehende Stromlinie eine Gerade ist, und zwar in der obigen Schreibweise die Gerade $y = -a\,x$ [7]).

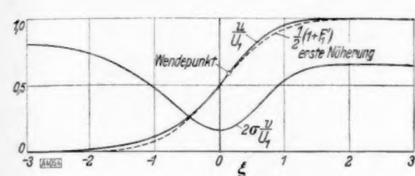


Bild 4. Ebener Strahlrand ($U_2 = 0$): Geschwindigkeitsverteilung.

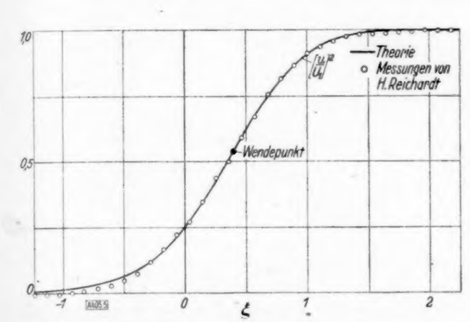


Bild 5. Ebener Strahlrand: Vergleich mit Druckmessungen von H. Reichardt. Auch die Lage des Profilwendepunkts stimmt mit dem Ergebnis Reichardts (nach besonderen Druckdifferenzenmessungen) überein.

Zahlentafel 2.

ξ	u/U_1	v/U_1	ξ	u/U_1	v/U_1
0	0,500	0,081			
0,2	0,619	0,093	− 0,2	0,388	0,092
0,4	0,733	0,128	− 0,4	0,292	0,121
0,6	0,832	0,176	− 0,6	0,214	0,159
0,8	0,905	0,227	− 0,8	0,155	0,201
1,0	0,953	0,269	− 1,0	0,111	0,239
1,2	0,980	0,300	− 1,2	0,079	0,274
1,4	0,993	0,314	− 1,4	0,056	0,304
1,6	0,998	0,323	− 1,6	0,039	0,329
∞	1	0,324	− 1,8	0,026	0,350
			− 2,0	0,017	0,368
			− 2,2	0,010	0,382
			− 2,4	0,006	0,392
			− 2,6	0,003	0,399
			$-\infty$	0	0,408

Bild 4 und Bild 5 beziehen sich auf den Fall $\lambda = 1$ (d. h. $U_2 = 0$). In Bild 4 ist das Geschwindigkeitsprofil $u(\xi)$ für $\lambda = 1$ gezeichnet (siehe auch Zahlentafel 2). Der Wendepunkt des Profils liegt nicht in $\xi = 0$ (wo $u = U_1/2$), sondern schwach nach der Seite höherer Geschwindigkeiten verlagert bei $\xi \approx 0{,}15$ (als Nullstelle von $F(\xi)$ ermittelt). Zum Vergleich ist gestrichelt die erste Näherung $u/U_1 = \frac{1}{2}(1 + F_1')$ eingezeichnet. Sie läßt einmal die Kleinheit der höheren Glieder der Entwicklung in Erscheinung treten, zum anderen zeigt sie das gesetzmäßige Abweichen der Funktion $u/U_1 - {}^1/_2$ von einer in ξ ungeraden Funktion, indem die ausgezogene Kurve links und rechts von $\xi = 0$ oberhalb der gestrichelten bleibt. In Bild 4 ist auch der Verlauf von $v(\xi)$ eingetragen so, wie er sich für unsere spezielle Lösung ergeben hat. In Bild 5 ist $u^2(\xi)/U_1^2$ aufgetragen. Auch hier liegt der Wendepunkt nicht dort, wo $u^2/U_1^2 = {}^1/_2$ ($\xi = 0{,}35$), sondern etwa bei $\xi = 0{,}4$ (als Nullstelle von $(u^2/U_1^2)''$ ermittelt. Dies steht nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ in völliger Übereinstimmung mit dem auf Grund von Druckdifferenzenmessungen von H. Reichardt[8]) gewonnenen Ergebnis. Aber

[6]) W. Tollmien fordert bei seinen entsprechenden Rechnungen nach dem alten Ansatz (3) für den Fall $\lambda = 1$ statt dessen: $v = 0$ für $y \to +\infty$; siehe W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926), S. 468 bis 478.

[7]) $\frac{v^*(x,y)}{u^*(x,y)} = \frac{v(x, y+a\,x)}{u(x, y+a\,x)} - a$, also mit $\frac{v(x,0)}{u(x,0)} = 0$ auch $\frac{v^*(x,-a\,x)}{u^*(x,-a\,x)} = -a$.

[8]) H. Reichardt: Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. VDI-Forsch.-Heft 414 (1942). Vgl. dort Bild 2 auf Seite 9.

auch der Gesamtverlauf der in Bild 5 wiedergegebenen Kurve stimmt gut überein mit den eingetragenen Meßpunkten nach Beobachtungsmaterial von H. Reichardt (abgesehen natürlich von den Rändern der Vermischungszone). Nach Reichardt a. a. O. ist die Breite der Vermischungszone — gemessen als Entfernung jener Stellen ξ, wo $(u/U_1)^2$ gleich 0,1 ($\xi = -0{,}345$) und 0,9 ($\xi = 0{,}975$) ist — durch $0{,}098\,x$ gegeben. Daraus ergibt sich (für diesen Fall $U_2 = 0$) der in unserer Theorie freibleibende Streckungsfaktor zu $\sigma = 13{,}5$.

2. Das ebene Problem der Strahlausbreitung.

Eine Flüssigkeit ströme aus einem engen Spalt (für die Rechnung eine singuläre Linie) und vermische sich mit der umgebenden ruhenden Flüssigkeit. Sieht man den Druck wieder als konstant an, so ist der Impuls in x-Richtung (Hauptrichtung des Strahles)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2\, d y = \text{const.}$$

Macht man für u den Ansatz $u = x^n f(y/x)$, so ist daher $n = -1/2$, also mit $\eta = y/x$, $f(\eta) = F'(\eta)$:

$$\psi = \sqrt{x}\, F(\eta), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{x}} F'(\eta), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ -\frac{1}{2} F + \eta F' \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1).$$

Ist b_s die gewählte charakteristische Breite des Strahls in der Entferung $x = s$ vom Austrittsspalt, so ist $b = b_s \cdot \frac{x}{s}$, ferner $u_{\max} - u_{\min} = [u_{\max} - u_{\min}]_{x=s} \cdot \sqrt{\frac{s}{x}}$ und also mit $\varepsilon_s = [\varepsilon]_{x=s}$

$$\varepsilon = \varepsilon_s \sqrt{\frac{x}{s}}.$$

Zu erfüllen ist demnach mit dem Ansatz (2.1) die Differentialgleichung

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_s \sqrt{\frac{x}{s}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2),$$

die auf

$$F''' = -\frac{\sqrt{s}}{4\,\varepsilon_s} (F^2)'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3)$$

führt. Zweimalige Integration führt auf

$$F' = -\frac{\sqrt{s}}{4\,\varepsilon_s} F^2 + U_s \sqrt{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.4),$$

wenn man die Zählung der Stromlinien $\psi = \text{const}$ durch die Forderung $F(0) = 0$ festlegt und ferner aus Symmetriegründen verlangt, daß $F'(\eta)$ eine gerade Funktion in η sein soll. U_s bezeichnet den Wert von u in $x = s$, $y = 0$. Die Differentialgleichung (2.4) besitzt dann das durch $F(0) = 0$ festgelegte Integral

$$F = 2 \sqrt{\varepsilon_s\, U_s}\, \mathfrak{Tang}\, \sigma \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.5)$$

mit

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s\, U_s}{\varepsilon_s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.6),$$

welches auch den Forderungen des Problems: $F'(\pm\infty) = 0$ von selbst gerecht wird. Demnach ist[9])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma}{s\, U_s} \psi &= \sqrt{\frac{s}{x}}\, \mathfrak{Tang}\, \sigma \eta, \\ \frac{u}{U_s} &= \sqrt{\frac{s}{x}}\, \mathfrak{Cof}^{-2} \sigma \eta, \\ \frac{v}{U_s} &= \sqrt{\frac{s}{x}} \left\{ \eta\, \mathfrak{Cof}^{-2} \sigma \eta - \frac{1}{2\sigma} \mathfrak{Tang}\, \sigma \eta \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.7).$$

σ ist den Experimenten zu entnehmen. Nach den Messungen von H. Reichardt (a. a. O., S. 13) ist der Abstand jener beiden Stellen des Profils $\left[\sqrt{\frac{x}{s}} \frac{u}{U_s}\right]^2$ mit dem Wert 0,5 durch $0{,}158\,x$ gegeben. Da nach (2.7) diese Stellen durch $\sigma \eta = \pm\, 0{,}606$ gegeben sind, ermittelt man hieraus: $\sigma = 7{,}67$.

[9]) Dieselbe Lösung hat, unabhängig von diesen Rechnungen, H. Reichardt angegeben (a. a. O., S. 20, Fußn. 25).

Es sei bemerkt, daß das Problem der ebenen laminaren Strahlausbreitung auf denselben Differentialgleichungstypus führt[10]), und daß demnach das nach der vorliegenden Theorie resultierende Geschwindigkeitsprofil im turbulenten Strahl zu jenem des laminaren Strahls affin ist. (Dort wächst die Strahlbreite allerdings nicht proportional zu x sondern zu $x^{2/3}$!)

In Bild 6 bzw. 7 haben wir das Geschwindigkeitsprofil $u(x, y)$ (siehe auch Zahlentafel 3) und das Stromlinienfeld in dimensionsloser Auftragung dargestellt. Zum Vergleich ist im Bild 6 auch das von Tollmien[11]) nach dem Ansatz (3) berechnete Profil gestrichelt ein-

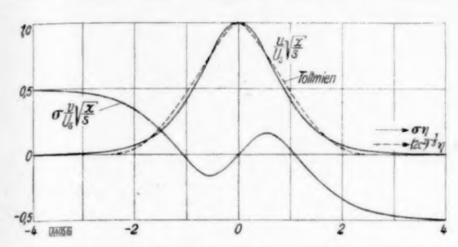


Bild 6. Ebener Strahl: Geschwindigkeitsverteilung. Gestaltlicher Vergleich mit dem u-Verlauf nach Tollmien.

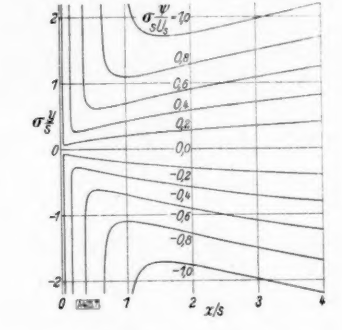


Bild 7 (rechts). Ebener Strahl: Stromlinienverlauf (affin verzerrtes Bild!).

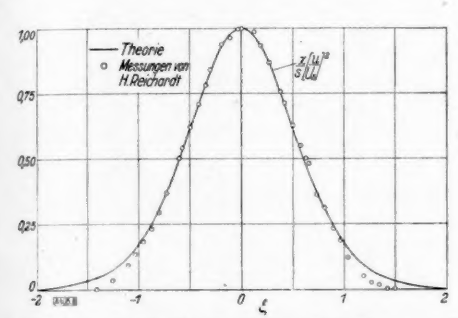


Bild 8. Ebener Strahl: Vergleich mit Druckmessungen von H. Reichardt.

Zahlentafel 3.

ξ	$\sqrt{\frac{x}{s}}\frac{u}{U_s}$	$\sigma\sqrt{\frac{x}{s}}\frac{v}{U_s}$
0	1	0
0,5	0,786	0,162
1,0	0,420	0,039
1,5	0,181	—0,181
2,0	0,071	—0,341
2,5	0,027	—0,427
3,0	0,010	—0,468
3,5	0,004	—0,486
4,0	0,001	—0,494
∞	0	—0,5

gezeichnet. Es muß dabei beachtet werden, daß die Streckungszahlen σ und $(2c^2)^{-1/3}$ (es ist c die im Tollmienschen Ergebnis freibleibende Integrationskonstante) in diesem Bilde völlig willkürlich einander gleichgesetzt wurden. Es kommt uns hier nur auf einen allgemeinen gestaltlichen Vergleich an, wobei die in der Einleitung genannten Merkmale der Ergebnisse beider Theorien deutlich in Erscheinung treten.

In Bild 8 geben wir schließlich einen Vergleich unserer Kurve für $\left[\sqrt{\frac{x}{s}}\frac{u}{U_s}\right]^2$ mit Beobachtungsmaterial von H. Reichardt. Die Übereinstimmung ist wiederum abgesehen von den Randgebieten gut[12]).

3. Nachträgliche Berechnung der Druckdifferenzen in erster Näherung.

War bisher in den behandelten Beispielen zur Vereinfachung Konstanz des Druckes angenommen, so wollen wir nun nach dem Vorgang von Tollmien[13]) nachträglich die Druckunterschiede in erster grober Näherung ermitteln. Die Kleinheit der sich ergebenden Druckdifferenzen wird die Annahme konstanten Druckes in unseren bisherigen Entwicklungen als gute Näherung bestätigen.

Der von Tollmien eingeschlagene Weg besteht darin, die Druckdifferenzen, welche durch Impulsänderung auf Grund der oben berechneten Geschwindigkeiten resultieren, zu ermitteln, wozu die bisher gestrichene zweite Bewegungsgleichung

[10]) Siehe S. Goldstein: Modern developments in fluid dynamics. Bd. I, S. 145 ff. bzw. die dort zitierte Originalliteratur.
[11]) W. Tollmien: a. a. O., S. 471 ff.
[12]) Im Gegensatz zu einer Bemerkung von H. Reichardt a. a. O., S. 20, Fußnote 25.
[13]) W. Tollmien: a. a. O., S. 476 ff.

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3.1)$$

dient. (Diese Rechnung ist als erster Schritt eines Iterationsverfahrens aufzufassen, wobei nunmehr unter Berücksichtigung des so gewonnenen Druckverlaufs die Geschwindigkeiten aus der ersten Bewegungsgleichung erneut — in zweiter Näherung also — berechnet werden, hieraus dann mittels (3.1) den Druckverlauf in zweiter Näherung usw.)

Im Falle des ebenen Strahlrandes erhält man $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial x}=U^2\frac{\eta}{x}FF''$ und somit

$$\left[\frac{1}{\varrho}p\right]_{y_2}^{y_1}=2U^2\int_{\eta_1}^{\eta_2}\eta FF''\,d\eta,$$

was wegen $2\sigma^2 FF''=-F'''$ (siehe (1.6)) auf

$$\left[\frac{1}{\varrho}p\right]_{y_1}^{y_2}=-\sigma^{-2}U^2\left[\eta F''-F'\right]_{\eta_1}^{\eta_2} \qquad (3.2)$$

führt. Striche bedeuten dabei überall Ableitungen nach η. Mit $\eta_1=-\infty$ und $\eta_2=+\infty$ erhält man

$$p_\infty-p_{-\infty}=2\lambda\sigma^{-2}\varrho U^2=4\varkappa c\frac{\varrho(U_1-U_2)^2}{2} \qquad (3.3).$$

Für den Fall $\lambda=1$ $(U_2=0)$ ergab der Vergleich mit dem Experiment (siehe oben) $\sigma=13{,}5$ und also

$$p_\infty-p_{-\infty}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\varrho U_1^2}{2}=0{,}0055\frac{\varrho U_1^2}{2} \qquad (3.3a).$$

Der Überdruck im Strahl ist also sehr klein. Die entsprechende Rechnung, die Tollmien nach dem Ansatz (3) durchführte, ergab mit den damaligen Messungen den Faktor 0,0058 an Stelle von 0,0055. (Es ergibt sich also eine bessere Übereinstimmung, als man erwarten darf.)

Im Falle des ebenen Strahls erhält man entsprechend zunächst $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial x}=\frac{1}{2x^2}(\eta FF')'$ und damit

$$\left[\frac{1}{\varrho}p\right]_{y_1}^{y_2}=\frac{1}{x}\left[\eta FF'-\frac{1}{4}F^2\right]_{\eta_1}^{\eta_2}$$

und für $\eta_1=0$, $\eta_2=\infty$ somit als Überdruck in Strahlmitte gegenüber dem Strahlrand mit $\sigma=7{,}67$

$$p_m-p_\infty=\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\varrho U^2(x)}{2}=0{,}0085\frac{\varrho U^2(x)}{2} \qquad (3.4),$$

wo $U(x)=u(x,0)$ die Geschwindigkeit auf der Mittellinie $y=0$ des Strahles bedeutet $(\sqrt{x}\,U(x)=\sqrt{s}\,U_s)$.

Die Druckdifferenz gegenüber der ruhenden Luft ergibt sich dadurch, daß man den Unterdruck am Strahlrand in Größe des Staudrucks der seitlichen Zuströmung in Rechnung setzt. Man erhält im Falle des Strahlrandes $(\lambda=1)$ wegen $v(-\infty)/U_1=-(2\sigma)^{-1}\Sigma F_\nu(-\infty)$

$$p_\infty-p_0=0{,}0046\frac{\varrho U_1^2}{2} \qquad (3.3b)$$

(nach Tollmien 0,0048 statt 0,0046). Im Falle des ebenen Strahles ist $v(x,\infty)=-(2\sigma)^{-1}U(x)$, und man erhält

$$p_m-p_0=0{,}0042\frac{\varrho U^2(x)}{2} \qquad (3.4a).$$

Die Druckdifferenzen sind in der Tat so klein, daß ihre Vernachlässigung in den vorangegangenen Rechnungen gerechtfertigt ist.

4. Probleme des ebenen Nachlaufs.

Es möge zum Abschluß nach dem neuen Ansatz (6) das Geschwindigkeitsfeld im Nachlauf hinter einem unendlich langen Zylinder und hinter einem aus solchen parallelen und äquidistanten Zylindern bestehenden ebenen Gitter in erster Näherung für weit stromabwärts gelegene Stellen berechnet werden. Der Druck werde dort wieder als konstant angesehen.

Ist U_0 die ungestörte Anströmgeschwindigkeit weit vor dem Zylinder, so setzen wir für hinreichend große Entfernungen stromabwärts in erster Näherung

$$u = U_0 + u_1, \quad v = v_1 \quad \ldots \ldots \quad (4.1)$$

mit

$$u_1 = x^{-n} f(y/b) \quad \ldots \ldots \quad (4.2)$$

wo $b = b(x)$ die Nachlaufbreite darstellt. Die Lage der Geraden $x = 0$ senkrecht zur Anströmungsrichtung ist nicht näher festgelegt. Nach dem Impulssatz ist mit Rücksicht darauf, daß kein Druckgefälle vorhanden ist und außerhalb des Nachlaufs keine Reibungskräfte bestehen

$$\int_0^{b/2} u_1 \, \mathrm{d} y = \text{const},$$

also nach (4.1), (4.2)

$$x^{-n} b(x) = \text{const}.$$

Es ist somit für hinreichend große x:

$$\varepsilon = \text{const} = \varepsilon_0 \quad \ldots \ldots \quad (4.3),$$

und man erhält für u_1, v_1 formal dieselben Differentialgleichungen wie im Falle des laminaren Nachlaufs[14]), es tritt nur ε_0 an Stelle der kinematischen Zähigkeit ν. Wir können uns daher kurzfassen. Da sich aus der Bewegungsgleichung (1.1) $n = 1/2$ ergibt, berechnet man leicht aus den bezüglich u_1 und v_1 linearisierten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0}{U_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (4.4)$$

unter Beachtung der Randbedingungen: $u_1 = 0$ für $y = \pm \infty$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{-W}{4 \varrho \sqrt{\varepsilon_0 U_0}} \frac{1}{\sqrt{x}} \Phi_1(\xi), \\ v_1 &= \frac{-W}{4 \varrho U_0} \frac{\xi}{x} \Phi_1(\xi) \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.5).$$

Dabei ist

$$\xi = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\varepsilon_0 x}}, \quad \Phi_1(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \quad \ldots \ldots \quad (4.6)$$

und die Integrationskonstante W stellt den Zylinderwiderstand pro Längeneinheit dar:

$$W = c_w d \frac{\varrho U_0^2}{2} = \varrho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (U_0 - u) \, \mathrm{d} y = -2 \varrho U_0 \int_0^{\infty} u_1 \, \mathrm{d} y \quad \ldots \ldots \quad (4.7)$$

(d Durchmesser und c_w Widerstandszahl des Körpers).

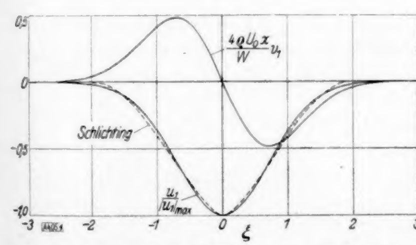


Bild 9. Ebener Nachlauf hinter einem Zylinder: Geschwindigkeitsprofil. Gestaltlicher Vergleich mit dem u_1-Verlauf nach H. Schlichting.

In Bild 9 ist die Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Gestrichelt eingetragen ist ferner das u_1-Profil nach den Rechnungen von H. Schlichting[15]) auf Grund des Ansatzes (3), ebenfalls in erster Näherung für hinreichend große x. (Die beiden $u_1/|u_1|_{\max}$-Kurven sind für den Vergleich so gezeichnet, daß sie denselben Flächeninhalt mit der waagerechten Achse einschließen, also denselben Widerstand liefern.)

Den Vergleich der Fehlerkurve für u_1 mit den Experimenten hat bereits H. Reichardt[16]) gegeben. Es ist wiederum gute Übereinstimmung bis auf die Randgebiete festzustellen.

Ist $y_{0,5}$ der Abstand von der Mittelachse, in welchem $u_1/|u_1|_{\max} = -0{,}5$, so ist mit guter Näherung nach den Messungen von Reichardt und von Schlichting[17]) $y_{0,5}/(c_w d x)^{1/2} = 1/4$.

[14]) Zum laminaren Nachlauf siehe S. Goldstein, Proc. Roy. Soc. (A) 142 (1933), S. 545—573.
[15]) H. Schlichting: Über das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 533 bis 571.
[16]) H. Reichardt: a. a. O. S. 14, Bild 10.
[17]) H. Reichardt: a. a. O. S. 14, Bild 11.

Wegen $e^{-\xi^2}=0,5$ für $\xi=0,833$ ergibt sich somit der Parameter ε_0 zu

$$\varepsilon_0=0,0450\ W/\varrho\ U_0=0,0225\ c_w\ d\ U_0\,.$$

Im Falle der laminaren Strömung[18]) ergeben sich bei der Berechnung höherer Näherungen Schwierigkeiten, da man mit einer Entwicklung der Gestalt

$$u=U_0+x^{-1/2}f_1(\xi)+x^{-1}f_2(\xi)+x^{-3/2}f_3(\xi)+\dots$$

über das Glied f_2 hinaus nicht zum Ziele kommt. Entsprechende Schwierigkeiten würden sich für das von uns behandelte Problem ergeben, in welchem darüber hinaus ε nur hinreichend weit draußen konstant ist.

Im Falle des Nachlaufs hinter einem aus parallelen und äquidistanten zylindrischen Stäben bestehenden ebenen Gitter ist b hinreichend weit stromabwärts gleich der Gitterweite B zu setzen. Mit

$$u_1=U_0\left(\frac{B}{x}\right)^n f(y/B)\quad\dots\dots\dots\dots\quad(4.8)$$

ergibt sich hier aus der ersten (linearisierten) Gl. (1.1): $n=1$, und als Differentialgleichung für $f(\eta)$ (mit $\eta=y/B$) geschrieben lautet sie

$$f''(\eta)+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 f(\eta)=0\quad\text{mit}\quad\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2=\varkappa\,(f_{\max}-f_{\min})\quad\dots\dots\quad(4.9).$$

Somit ist

$$f(\eta)=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\eta+\gamma\right).$$

Ohne Einschränkung kann $\gamma=0$ gesetzt werden, und indem wir das Vorzeichen von A positiv annehmen, haben wir insgesamt nur festgelegt, daß $y=0$ die Mittellinie zwischen zwei benachbarten Gitterstäben bilden soll. Die Periode der Lösung in y ist gleich B, also in η gleich 1 anzunehmen, somit ist $\lambda=1$, d. h.

$$f(\eta)=A\cos 2\pi\eta\,.\quad\dots\dots\dots\dots\quad(4.10).$$

Mit Rücksicht darauf, daß $f_{\max}-f_{\min}=2A$ ist, besteht der Zusammenhang:

$$A=1/8\pi^2\varkappa\,.$$

Als Lösung ergibt sich somit:

$$u_1=\frac{U_0}{8\pi^2\varkappa}\frac{B}{x}\cos\frac{2\pi y}{B},\qquad v_1=\frac{U_0}{16\pi^3\varkappa}\left(\frac{B}{x}\right)^2\sin\frac{2\pi y}{B}\quad\dots\dots\quad(4.11).$$

Nach den Messungen von R. Gran Olsson[19]) und G. Cordes[20]) für noch mäßige Werte von x/B werden diese Ergebnisse recht gut bestätigt. Der Vergleich ergibt (unter Benutzung der Tabelle 5, S. 271 in dem Aufsatz von Gran Olsson)

$$\varkappa=(0,103)^2\,\pi=0,0333\,.$$

Andere Meßergebnisse zeigen systematische Abweichungen des Abklingungsgesetzes von dem Potenzgesetz $n=1$ und zwar gibt die Auswertung von Messungen Drydens sogar $n=4,5$[21]).

405

---

[18]) S. Goldstein: a. a. O., S. 555.

[19]) R. Gran Olsson: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 257 bis 274.

[20]) G. Cordes: Untersuchungen zur statischen Druckmessung in turbulenter Strömung. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937), S. 245 bis 270.

[21]) Siehe hierüber L. Prandtl: Beitrag zum Turbulenz-Symposium. Vortrag auf dem Internat. Mechanikkongress 1938 in Cambridge (USA). In diesem Zusammenhang verweise ich noch auf die Messungen von J. G. Edler von Bohl: Das Verhalten paralleler Luftstrahlen. Ing.-Arch. Bd. 11 (1940), S. 295 bis 314.

Der schwimmende Balken.

Von *Friedrich Schiel* in Dresden.

Die Behandlung des Balkens, der auf dem gleichmäßig federnden (= elastisch isotropen) Halbraum aufliegt, ist mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Wieghardt hat einen Näherungsansatz vorgeschlagen, um die Schwierigkeiten zu verringern. Im folgenden wird gezeigt, daß das mechanische Modell dieses Ansatzes eine schwere, nichtbenetzende Flüssigkeit ist. Die Berechnung eines auf einer solchen Flüssigkeit schwimmenden Balkens ist als Näherungsverfahren zur Behandlung von Bauwerken auf nachgiebigem Baugrund geeignet.

Belastet man einen gewichtslosen, auf einer Flüssigkeit schwimmenden Balken, so wird er im allgemeinen auf Biegung beansprucht. Mit diesen Beanspruchungen befassen sich die folgenden Darlegungen im Hinblick auf die wertvollen Analogieschlüsse, welche sich auf das Verhalten von Balken auf nachgiebiger Unterlage ergeben. Es wird dabei keine Vollständigkeit angestrebt, sondern jede Gelegenheit benützt, um durch Näherungsannahmen zu rechnerischen Vereinfachungen zu gelangen.

1. Flüssigkeit ohne Oberflächenspannung.

Ein elastischer Balken mit rechteckigem Querschnitt von konstanter Breite b soll auf einer Flüssigkeit vom Einheitsgewicht γ schwimmen. Unter Belastungen, welche in der lotrechten Ebene durch die Balkenachse erfolgen sollen, wird er in die Flüssigkeit einsinken und sich durchbiegen. Der Auftrieb, mit dem die Flüssigkeit auf die Flächeneinheit der Balkenunterseite drückt, ist

$$p = \gamma w \quad \text{. . . . . (1),}$$

wenn w die Einsenkung gegenüber dem waagerechten Flüssigkeitsspiegel ist. Man sieht, daß hier die bekannte Bettungsziffertheorie gilt, welche zur Berechnung von Balken auf nachgiebiger Unterlage verwendet wird[1]). Dem Einheitsgewicht γ der Flüssigkeit entspricht die Bettungsziffer, wodurch die Dimension kg/cm³ bzw. t/m³ dieser Größe ohne weiteres verständlich wird. Allerdings gibt es so schwere Flüssigkeiten nicht, deren Auftrieb der Nachgiebigkeit z. B. von Baugrund entspricht, zu dessen Kennzeichnung Bettungsziffern von der Größenordnung 500 bis 50000 t/m³ verwendet werden.

Die Einsenkungen w gehorchen der Differentialgleichung

$$E J \frac{d^4 w}{d x^4} + \gamma b w = q \quad \text{. . . . . (2),}$$

worin E und J die bekannte Bedeutung (Elastizitätsmodul und Trägheitsmoment des Balkens) haben und q die Belastung des Balkens bezogen auf seine Längeneinheit ist.

2. Ansatz mit Oberflächenspannung.

Wir beschränken uns auf die eindimensionale Aufgabe. Der Balken sei also z. B. ein Streifen von der Breite b, herausgeschnitten aus einem unendlich breiten Balken. Alle Belastungen sollen längs der Breite gleichmäßig verteilt sein. Die Flüssigkeit soll den Balken nicht benetzen, so daß die Flüssigkeitsoberfläche an der Balkenunterseite entlangläuft.

Der Druck auf die Unterseite des Balkens besteht dann nicht nur aus dem hydrostatischen Anteil $\gamma b w$, sondern auch aus der Wirkung der Oberflächenspannung σ der Flüssigkeit. Wäre die Flüssigkeitsoberfläche frei, so bestünde zwischen ihrer Krümmung und dem Flüssigkeitsdruck γw die durch den ersten von Laplace aufgestellten Satz der Kapillaritätstheorie gegebene Beziehung:

$$\gamma w = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{. . . . . (3),}$$

worin r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Flüssigkeitsoberfläche sind, von denen hier wegen der zylindrischen Krümmung der eine unendlich ist. Beschränken wir uns auf kleine Neigungen, so kann die rechte Seite von (3) $\sigma \frac{d^2 w}{d x^2}$ geschrieben werden. Auf die Balkenunterseite

[1]) Die Übereinstimmung des Verhaltens einer durch die Bettungsziffer gekennzeichneten Unterlage mit dem einer Flüssigkeit ist von Schleicher ausgesprochen worden. Beton und Eisen Bd. 26 (1927), S. 434.

wirkt der Unterschied zwischen dem hydrostatischen Druck γw und dem Einfluß der Oberflächenspannung, und man erhält somit die Differentialgleichung, welche die Einsenkungen w des Balkens beherrscht, wenn man in Gl. (2) das Glied $\gamma b w$ durch $\gamma b w - \sigma b \frac{d^2 w}{d x^2}$ ersetzt, also

$$E J \frac{d^4 w}{d x^4} - \sigma b \frac{d^2 w}{d x^2} + \gamma b w = q \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Besonderheiten an den Balkenenden werden später besprochen.

Wir wollen einen anderen Ausgangspunkt für die Behandlung unserer Aufgabe beschreiben, nämlich das Gesetz, nach welchem die Flüssigkeitsoberfläche bei Belastung einer Stelle einsinkt. Auf eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeitsoberfläche wirke eine gleichmäßig verteilte Linienlast. Wir betrachten einen Streifen von der Breite b senkrecht zur geraden Lastlinie nach Bild 1. Auf das Stück b der Lastlinie entfalle die Last P. Wir bezeichnen die Abstände von P mit ξ. Da wir es mit einer freien Flüssigkeitsoberfläche zu tun haben, gilt nach Laplace unmittelbar

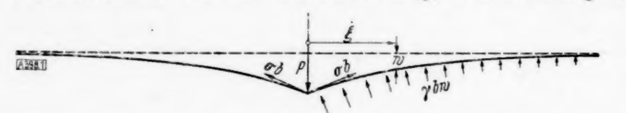


Bild 1. Einzellast auf einer Flüssigkeitsoberfläche.

$$\gamma w = \sigma \frac{d^2 w}{d \xi^2} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Randbedingungen für die Lösung bestehen darin, daß w im Unendlichen verschwindet und daß im Angriffspunkt die Kraft P mit den beiden Oberflächenkräften σb im Gleichgewicht stehen muß, was sich unter der oben gemachten Voraussetzung kleiner Neigungen folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$2 \sigma b \left| \frac{d w}{d \xi} \right| = P \quad \text{für } \xi = 0 .$$

Damit ergibt sich schließlich

$$w = \frac{P}{2 b \sqrt{\gamma \sigma}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \xi} .$$

Zur Erhöhung der Anschaulichkeit in der weiteren Behandlung führen wir die konstante Subtangente s der Exponentialfunktion ein und erhalten

$$w = \frac{P}{2 b s \gamma} \cdot e^{-\frac{\xi}{s}} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Die Eigenschaften der Flüssigkeit werden durch die beiden Konstanten γ (= Kraft pro Volumen) und s (= Länge) gekennzeichnet, welche mit der Oberflächenspannung σ in folgendem Zusammenhang stehen:

$$\sigma = \gamma s^2 .$$

Wir wenden uns jetzt wieder dem Balken zu. Den Druck auf seine Unterseite bezeichnen wir mit p. Wäre p als Funktion von ξ gegeben, so könnte man die Einsenkung w nach Gl. (6) berechnen, indem man darin $P = p\, d\xi$ setzt und die Anteile superponiert. Von der Balkenmitte aus zählen wir die Abstände x. Der Balken reicht von $-a$ bis $+a$. Man würde somit w als Funktion von x erhalten:

$$w = \frac{1}{2 b s \gamma} \cdot \int_{-a}^{+a} p(\xi) \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot |x - \xi|} \cdot d\xi \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

3. Ansatz von Wieghardt.

Im 2. Jahrgang (1922) dieser Zeitschrift hat Wieghardt (Seite 165 bis 185) den Balken auf nachgiebiger Unterlage behandelt. Dieser Aufsatz hat eine gewisse Berühmtheit erlangt, weil er lange Zeit[2]) die einzige genaue Berechnung eines Balkens auf nachgiebiger Unterlage enthielt, welche nicht auf der einfachen Bettungsziffertheorie fußt, sondern auch die „Druckausbreitung" berücksichtigt.

[2]) Den unendlich langen Balken auf dem gleichmäßig federnden Halbraum hat Marguerre behandelt, Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 224 u. f., den endlichen Balken bzw. den Plattenstreifen Borowicka, Ing.-Arch. Bd. 10 (1939), S. 113 u. f.

Die Ergebnisse des Zahlenbeispiels, welches Wieghardt behandelt, wurden wiederholt angeführt[3]), um die Richtigkeit von Näherungsrechnungen für den Balken auf dem gleichmäßig federnden Halbraum darzutun. Dessen Eigenschaften bilden aber nicht die Grundlage der Untersuchungen von Wieghardt, sondern er ersetzt das von diesem Halbraum bekannte Gesetz, wonach die Einsenkungen bei Belastung eines Punktes umgekehrt proportional mit der Entfernung abnehmen durch eine Exponentialfunktion, um die Aufgabe einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.

Wieghardt erhält als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen eine Integralgleichung, welche mit unserer Gl. (7) völlig übereinstimmt! Man kann also sagen, der Wieghardtsche Halbraum ist eine schwere, nicht benetzende Flüssigkeit. Voraussetzung ist dabei, daß die Neigungen der Oberfläche klein bleiben, was bei Balken auf nachgiebigem Baugrund immer mit genügender Genauigkeit zutrifft. Genauer müßte man bei Wieghardt nicht vom Halbraum, sondern von der Halbebene sprechen, da er nur den Balken, nicht die Platte betrachtet.

Die Benützung der schweren, nichtbenetzenden Flüssigkeit als Gedankenmodell erlaubt nun, die Ergebnisse von Wieghardt zum größten Teil ohne den von ihm benützten mathematischen Apparat zu erhalten. Die Differentialgleichung (4), welche Wieghardt aus der Integralgleichung (7) herleitet, ergab sich z. B. unmittelbar aus den Eigenschaften der Flüssigkeit.

4. Starrer Balken.

Die Behandlung des starren Balkens ist mit unseren Hilfsmitteln durchaus kein „schwieriges Problem". Wenn der Balken symmetrisch belastet wird, erfolgt das Einsinken in die Flüssigkeit nach Bild 2. Wir unterscheiden die Einsenkungen innerhalb und außerhalb des Balkens durch die Bezeichnungen w_i und w_a. Die Abstände x zählen wir vom Balkenende nach außen. Dann ist

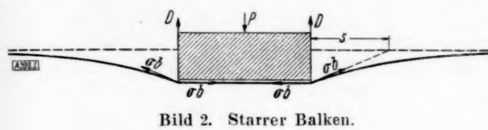


Bild 2. Starrer Balken.

$$w_i = \text{konstant} = w\,, \qquad\qquad w_a = w \cdot e^{-\frac{x}{s}}\,.$$

Auf die Balkenunterseite wirkt der konstante Druck $\gamma\, b\, w$ für die Längeneinheit, und an den Enden je eine Kraft D, welche dem Knickwinkel der Flüssigkeitsoberfläche verhältnisgleich ist. Bezeichnen wir mit P die gesamte symmetrische Belastung (in Bild 2 durch eine Einzellast angedeutet) des Balkens von der Länge l, so erhalten wir:

$$D = \frac{w}{s}\,\sigma\, b \qquad \text{oder mit} \qquad \sigma = \gamma\, s^2$$

$$D = \gamma\, s\, b\, w$$

$$P = 2\,D + \gamma\, w\, b\, l$$

$$w = \frac{P}{\gamma\, b\, l} \cdot \frac{1}{1 + 2\,\dfrac{s}{l}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8).$$

Mit $s = 0$ erhält man aus (8) die Einsenkung nach der Bettungsziffertheorie.

5. Vergleich der Flüssigkeit mit dem Halbraum.

Wenn man die Theorie des schwimmenden Balkens als Ersatz für die Theorie des Balkens auf dem gleichmäßig federnden Halbraum benützen will, liegt die Frage nach der Größe der Federungszahl (Elastizitätsmodul) des Halbraums nahe, der einer Flüssigkeit mit gegebenen Konstanten γ und s annähernd entspricht. Wir vergleichen Gl. (8) mit den Ergebnissen, die Schleicher[4]) bei der Berechnung der mittleren Einsenkung von gleichmäßig belasteten rechteckigen Bereichen des Halbraums erzielt hat.

Richtiger wäre es natürlich, nicht den starren Balken nach (8) zum Vergleich heranzuziehen, sondern entsprechend dem Vorgang in der Arbeit von Schleicher einen Balken ohne Biegungssteifigkeit, bei dem die Einsenkung der Flüssigkeitsoberfläche bei gleichmäßig verteilter Belastung die Form einer Kettenlinie annimmt. Die mittlere Einsenkung ist aber nur wenig größer als beim starren Balken, so daß mit Rücksicht auf den Näherungscharakter der Rechnung die einfache Gl. (8) verwendet werden soll.

---

[3]) Habel, Näherungsberechnung des auf dem elastisch-isotropen Halbraum aufliegenden elastischen Balkens. Bauingenieur Bd. 19 (1938), S. 76 u. f., insbes. S. 79 u. 80; Ohde, Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern. Bauingenieur Bd. 23 (1942), S. 99 u. f., insbes. S. 102 und 105.

[4]) Bauingenieur Bd. 7 (1926), S. 931 u. f., insbes. S. 949.

Nach Schleicher ist die mittlere Einsenkung des Halbraums

$$w_m = \omega \frac{P}{C\sqrt{F}} \qquad (9),$$

worin P die gesamte Belastung,

$F = b \cdot l$ die Fläche des belasteten Rechtecks,

$C = \frac{m^2}{m-1} \cdot E$ mit der in der Elastizitätslehre üblichen Bedeutung der Buchstaben und ω ein Zahlenwert ist, der sich mit dem Seitenverhältnis des Rechtecks ändert. Ist dieses Verhältnis 1 : 3, 5 und 10, so ist $\omega = 0{,}88$, 0,82 und 0,71. Setzen wir $w = w_m$ nach (8) und (9), so erhalten wir

$$C = \omega\,\gamma\left(1 + 2\frac{s}{l}\right)\sqrt{b\,l} \qquad (10).$$

Je kleiner man die Länge s wählt, desto mehr nähert man sich der Bettungsziffertheorie und für $s = 0$ verwandelt sich (10) in jene Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{C}{\sqrt{F}},$$

welche Schleicher zur Bestimmung der Bettungsziffer empfiehlt, um die Ergebnisse dieser Theorie mit der Halbraumtheorie zur möglichst guten Übereinstimmung zu bringen.

Es liegt die Frage nahe, wie die Konstanten γ und s ausgewählt werden müssen, damit Balken verschiedener Größe auf derselben nachgiebigen Unterlage möglichst zutreffend verglichen werden können. Eine eindeutige Antwort ist nur dann möglich, wenn die Unterlage der Bettungsziffertheorie gehorcht, nicht aber, wenn sie ein gleichmäßig federnder Halbraum ist, weil die Vorschrift (10) hierfür nicht eindeutig ist. Unter den verschiedenen Möglichkeiten erscheint mir die folgende Festlegung den Vorzug einer gewissen Natürlichkeit zu haben: Man bringe die Konstanten γ und s in eine feste Beziehung zur Balkenbreite b, und zwar

$$\gamma = \frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad s = \beta\,b\,.$$

Will man sich den Verhältnissen des gleichmäßig federnden Halbraums annähern, so muß man β so wählen, daß a für denselben Halbraum konstant bleibt. Durch Einführung von $s = \beta\,b$ in Gl. (10) ergibt sich

$$\gamma = \frac{C \cdot \sqrt{\frac{b}{l}}}{\omega\,b\left(1 + 2\beta\frac{b}{l}\right)}$$

und für $\beta = 1{,}5$ ist tatsächlich a annähernd konstant für Seitenverhältnisse $l : b = 3$ bis 10, also für den praktisch bei Balken vorkommenden Bereich. Wie man sich durch Einführung der ω-Werte von Schleicher für diesen Bereich überzeugt, ist nämlich (mit einer Genauigkeit von 2 %)

$$\frac{\sqrt{\frac{b}{l}}}{\omega\left(1 + 3\frac{b}{l}\right)} \approx \frac{1}{3}.$$

Man kann also sagen, daß die Halbraumverhältnisse annähernd durch folgende Festsetzung für die Flüssigkeit wiedergegeben werden:

$$\gamma = \frac{C}{3\,b}, \qquad s = 1{,}5\,b \qquad (11).$$

Auf die zweckmäßige Auswahl von λ und s bei nachgiebigem Baugrund hoffe ich an anderer Stelle eingehen zu können. Es kann hier nur der Schluß gezogen werden, daß s Werte unter $1{,}5\,b$ annehmen wird, da Baugrund hinsichtlich seiner elastischen Eigenschaften zwischen der Halbraum- und der Bettungsziffertheorie steht. Die Angaben von Schleicher[4]) über C-Werte von Baugrund, welche auf beobachteten Senkungen von Bauwerken und Probebelastungen beruhen, bewegen sich zwischen den Grenzen von 100 und 1000 kg/cm². Daraus ergibt sich nach (11), daß bei einer Balkenbreite

bei $b = 0{,}50$ m $\gamma = 0{,}7$ bis 7 kg/cm³
$b = 10$ m $\gamma = 0{,}03$ bis 0,3 kg/cm³
erwartet werden kann.

6. Biegsamer Balken mit Gleichlast.

Zur Berechnung des biegsamen, schwimmenden Balkens steht die Differentialgleichung (4) zur Verfügung. Am wichtigsten ist der Fall q = konstant, gleichmäßig verteilte Last, auf den sich auch Wieghardt beschränkt. An diesem Belastungsfall wird nämlich die Unzulänglichkeit der Bettungsziffertheorie zur Beschreibung von nachgiebigem Baugrund besonders deutlich, da nach dieser Theorie ein gleichmäßiges Einsinken des Balkens ohne Verbiegung eintritt, während die Beobachtung von langen Bauwerken lehrt, daß die Mitte stärker einsinkt und somit Verbiegungen auftreten.

Den Weg der direkten Lösung von (4) werde ich nicht beschreiten, obwohl er keine besonderen Schwierigkeiten bietet, sondern zeigen, daß es für jenen Bereich der Flüssigkeitskonstanten γ und s, welcher beim Vergleich mit nachgiebigem Baugrund hauptsächlich vorkommt, eine genügend genaue wesentlich einfachere Näherungsrechnung gibt. Das zweite, der Krümmung proportionale Glied von (4) ist nämlich meist im ganzen Verlauf des Balkens klein gegen die übrigen, so daß statt (4) die einfachere Differentialgleichung (2) der Bettungsziffertheorie verwendet werden kann. Nur an den Enden, wo die Krümmung infolge des Knickes in der Flüssigkeitsoberfläche unendlich groß ist, spielt das Krümmungsglied eine Rolle. Es macht also seinen Einfluß nur auf die Integrationskonstanten geltend.

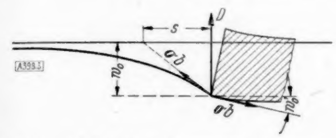


Bild 3. Ende eines biegsamen Balkens.

Damit ergibt sich folgende Rechenvorschrift für den biegsamen Balken: Außer dem Bettungsdruck $p = \gamma w$ wirkt an den Balkenenden je eine Kraft D, welche mit der Einsenkung und Verdrehung des Endquerschnittes nach Bild 3 folgendermaßen zusammenhängt:

$$D = \sigma \cdot b \left(\frac{w_0}{s} - w_0' \right) \quad \text{oder mit} \quad \sigma = \gamma s^2$$

$$D = \gamma s b (w_0 - s \cdot w_0') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

worin w_0 die Einsenknng und w_0' die Verdrehung des Endquerschnittes darstellt. Zum Beweis für die Zulässigkeit der Näherung kann man die Balkenbelastung q vergleichen mit dem auf die Balkenunterseite wirkenden Druckanteil $\Delta p = -\sigma b \frac{d^2 w}{d x^2}$, der durch die Krümmung erzeugt würde, wobei $\frac{\Delta p}{q}$ über die Größenordnung der Fehler Aufschluß gibt.

Als Beispiel zur Erläuterung und zum Beweis der genügenden Annäherung in jenem Bereich der Konstanten, welche bei Baugrund in Frage kommen, wählen wir den einseitig unendlich langen Balken. Die Bettungsziffertheorie liefert[5]) für eine am Ende senkrecht nach oben wirkende Kraft D:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{2D}{\gamma b L} \cdot e^{-\xi} \cdot \cos \xi \\ \frac{d w}{d x} &= +\frac{2D}{\gamma b L^2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \\ \frac{d^2 w}{d x^2} &= -\frac{4D}{\gamma b L^3} \cdot e^{-\xi} \cdot \sin \xi \\ M &= +D L e^{-\xi} \cdot \sin \xi \,(\text{Biegungsmoment}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Darin ist L eine Vergleichslänge, auf welche die Abstände x bezogen werden:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 E J}{\gamma \cdot b}} \qquad \xi = \frac{x}{L}.$$

(Die Verwendung derselben Bezeichnung ξ in (7) und (13) mit verschiedener Bedeutung ergab sich aus dem Bestreben, mit den angezogenen Quellen in möglichster Übereinstimmung zu bleiben.) Die Gleichlast q (auf die Längeneinheit des Balkens) hat nach der Bettungsziffertheorie eine gleichmäßige Einsenkung $q/\gamma b$ zur Folge. Demnach ist entsprechend Bild 3

[5]) Nach Beyer: Die Statik im Eisenbetonbau, 2. Aufl., Berlin 1933, S. 142.

$$w_0 = \frac{q}{\gamma b} - \frac{2D}{\gamma b L}$$

$$w_0' = \frac{2D}{\gamma b L^2}$$

und nach (12)

$$D = \gamma s b \left(\frac{q}{\gamma b} - \frac{2D}{\gamma b L} - s \frac{2D}{\gamma b L^2} \right)$$

oder

$$D = \frac{q \cdot s}{1 + 2\frac{s}{L} + 2\left(\frac{s}{L}\right)^2} = \varkappa q s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Damit ergeben sich Einsenkung und Biegemoment nach (13):

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \frac{q}{\gamma b}\left(1 - 2\varkappa\frac{s}{L}\right) \\ w_a &= w_0 \cdot e^{-\frac{x}{s}} \\ w_i &= \frac{q}{\gamma b}\left(1 - 2\varkappa\frac{s}{L}\, e^{-\xi}\cos\xi\right) \\ \frac{\mathrm{d}^2 w_i}{\mathrm{d}x^2} &= -4\varkappa\frac{q}{\gamma b}\frac{s}{L^3} e^{-\xi}\sin\xi \\ M &= \varkappa q s L e^{-\xi}\sin\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Darin ist bei w_a x nach außen, sonst ξ nach dem Balkeninneren positiv gezählt.

Zur Abschätzung der Größenordnung des Fehlers berechnen wir

$$\Delta p = -\sigma b \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \qquad \text{oder mit} \quad \sigma = \gamma s^2$$

$$\Delta p = 4\varkappa q \left(\frac{s}{L}\right)^3 e^{-\xi}\sin\xi .$$

Der Größtwert tritt bei $\xi = \frac{\pi}{4}$ auf, wo $e^{-\xi}\sin\xi = 0{,}3224$ ist.

$$\max\frac{\Delta p}{q} = 1{,}29\,\varkappa\left(\frac{s}{L}\right)^3 = \frac{1{,}29\left(\frac{s}{L}\right)^3}{1 + 2\frac{s}{L} + 2\left(\frac{s}{L}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Wir nehmen den Balkenquerschnitt rechteckig mit der Breite b und der Höhe h an und berechnen

$$J = \frac{b h^3}{12}$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\gamma b}} = \sqrt[4]{\frac{E h^3}{3\gamma}}.$$

Die Konstanten γ und s führen wir nach (11) ein, das bedeutet Annäherung an den gleichmäßig federnden Halbraum, und erhalten

$$\frac{s}{L} = 1{,}5\sqrt[4]{\left(\frac{b}{h}\right)^3 \cdot \frac{C}{E}}.$$

Die Genauigkeit unserer Näherung hängt in entscheidender Weise vom Seitenverhältnis des Balkenquerschnittes ab und man erhält das Ergebnis (siehe Zahlentafel 1), daß die Größenordnung der Fehler bei eigentlichen „Balken" ($b/h < 3$) in erträglichen Grenzen bleibt. Die Abschätzung der Größenordnung der Fehler in der Zahlentafel gründet sich auf die Annahme $s = 1{,}5\,b$. Ist s kleiner, was bei Baugrund wahrscheinlich ist, so werden die Fehler kleiner.

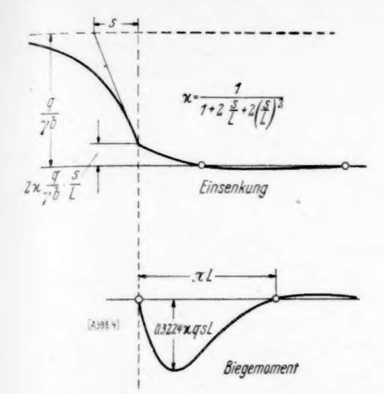


Bild 4 (nebenstehend). Einsenkung und Biegemoment eines einseitig unendlich langen Balkens mit Gleichlast q auf der Längeneinheit.

Zahlentafel 1

$\frac{b}{h}$	$C = 1000$ kg/cm²		$C = 100$ kg/cm²	
	$\frac{s}{L}$	$\max \frac{\Delta p}{q}$	$\frac{s}{L}$	$\max \frac{\Delta p}{q}$
0,1	0,12	0,002	0,04	0,0001
0,5	0,23	0,009	0,13	0,002
1	0,39	0,031	0,22	0,008
2	0,66	0,097	0,37	0,027
3	0,90	0,172	0,51	0,055

In Bild 4 ist Einsenkung und Biegemoment eines einseitig unendlich langen Balkens nach den Gln. (15) dargestellt. Man sieht, daß das Biegemoment in der Nähe des Balkenendes seinen Größtwert hat und nach dem Inneren abklingt. Dieses Ergebnis scheint nicht selbstverständlich zu sein, denn für den biegsamen Balken mit Gleichlast ist[6]) z. B. ein Näherungsverfahren vorgeschlagen worden, welches auch Eingang in die Baupraxis fand, nach welchem die Biegemomente mit dem Quadrat der Balkenlänge zunehmen, was nur bei kurzen Balken zutrifft.

Ganz entsprechend wie beim einseitig unendlichen Balken läßt sich die Berechnung des endlichen Balkens aus der Bettungsziffertheorie mit Hinzufügung zweier Kräfte D an den Balkenenden aufbauen. Ich werde an anderer Stelle den Rechnungsgang ausführlich behandeln und bringe hier nur zur Veranschaulichung das Ergebnis (siehe Bild 5) für einige gleichmäßig belastete Balken, welche sich nur durch ihre Länge unterscheiden.

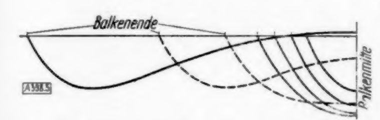


Bild 5. Biegemomente von Balken verschiedener Länge mit Gleichlast.

7. Die Wieghardtschen Ergebnisse.

Der „Bodendruck" einer durch den Wieghardtschen Ansatz gekennzeichneten Unterlage wird an den Balkenenden nicht nur unendlich, wie beim gleichmäßig federnden Halbraum, sondern er artet zu zwei konzentrierten Einzelkräften aus. Wieghardt ist der Meinung, daß die konzentrierten Drücke beim elastischen Balken nicht auftreten dürften, sofern man die technische Biegelehre durch eine genauere elastizitätstheoretische Rechnung ersetzt. Er findet tatsächlich, daß statt des konzentrierten Druckes ein Unendlichwerden des Bodendruckes erfolgt, was aus einem in unendlich kleiner Umgebung erfolgenden Wegdrücken der Balkenecke durch die Flüssigkeitsoberfläche verständlich wird. Merkwürdigerweise ergibt aber sein Zahlenbeispiel nicht nur für die Balkenenden, sondern auch für den übrigen Verlauf merkliche Abweichungen in den Bodendrücken bei genauer elastizitätstheoretischer Berechnung gegenüber der technischen Biegelehre.

Diese Tatsache könnte man nur verstehen, wenn die Unterlage ungewöhnlich hart ist. Durch Vergleich unserer Gl. (7) mit den Wieghardtschen Gln. (8) und (9) ergeben sich die Konstanten, welche seinem Beispiel zugrunde liegen:

$$s = \frac{1}{k} = 32 \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{k}{2\,b\,c} \quad \left(b = \text{Balkenbreite} = 25 \text{ cm}, \quad c = \frac{1}{100000}\text{ cm/kg}\right)$$

$$= \frac{100000}{2 \cdot 25 \cdot 32} = 62{,}5 \text{ kg/cm}^3 .$$

Vergleichen wir diese Konstanten mit unserer Annahme (11), so ergibt sich zunächst, daß s sich von dem für den gleichmässig federnden Halbraum geltenden Wert $1{,}5\,b$ wenig unterscheidet. Benützen wir (10) zur Abschätzung des C-Wertes der Unterlage, so ergibt sich mit $\omega = 0{,}71$ für ein Seitenverhältnis $l/b = 10$ des Balkens

$$C = 0{,}71 \cdot 62{,}5\left(1 + 2\,\frac{32}{256}\right)\sqrt{25 \cdot 256} = 5300 \text{ kg/cm}^2 .$$

[6]) Kögler-Scheidig: Baugrund und Bauwerk, 2. Aufl., Berlin 1939, S. 213 bis 215.

Berücksichtigt man noch, daß Wieghardt mit $E = 100000$ kg/cm² (z. B. Holz) rechnet, während Beton der doppelten Wert hat, so ergibt sich, daß Wieghardt sein Zahlenbeispiel mit einer Unterlage berechnet hat, welche im Verhältnis zu seinem Balken rund zehnmal so hart ist wie der Boden nach den höchsten Angaben von Schleicher[6]) im Verhältnis zu Fundamentbeton.

Über die Integralgleichung (7) und deren Kern bemerkt Neményi[7]) folgendes: „Die Auffassung Wieghardts, daß die Unstimmigkeiten, die aus seinem Aufsatz resultieren, auf Mängel der Balkenbiegungs-Differentialgleichung zurückzuführen sind, ist nicht stichhaltig. Die Unstimmigkeiten rührten zweifellos wesentlich von der Wahl des Kerns her." Trotz seines (ebenda) erwähnten „sorgfältigen Studiums der Integralgleichungen" und obwohl er die Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage zum Gegenstand einer eigenen Vorlesung[8]) gemacht hat, gibt aber Neményi weder eine Erklärung für die Wieghardtschen „Unstimmigkeiten", noch aber hat er die außerordentliche Fruchtbarkeit des Wieghardtschen Ansatzes zur Berechnung von Balken auf nachgiebiger Unterlage erkannt.

Durch meine Darlegungen hoffe ich zur weiteren Anwendungsmöglichkeit der Bettungsziffertheorie, welche „in neuerer Zeit heftig angegriffen wurde" (Borowicka, a. a. O.) beizutragen, indem ihre Anpassungsfähigkeit an verschiedene Bodeneigenschaften durch zwei wählbare Parameter γ und s gesteigert wird. 398

[7]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931), S. 461, Fußnote 31.
[8]) T. H., Berlin, S. S. 1931.

Über den Spannungszustand im Halbraum bei halbkugelförmiger Druckverteilung[1]).

Von *Nicola Usunoff* in Sofia.

Erster Teil.

Verfasser berechnet die räumliche Verteilung der senkrechten Spannungskomponente σ_x und der Schubspannung τ in einem Halbraum, auf dessen Oberfläche eine halbkugelförmig verteilte Belastung wirkt. Nach Aufstellung und Lösung des Grundintegrals werden die Spannungskurven für eine Reihe von Werten der σ_x und τ konstruiert. Merkbare Übereinstimmung dieser σ_x-Kurven bzw. -Flächen mit denjenigen, die von einer gleichwertigen Einzelkraft herrühren, ist bei Werten kleiner als $0{,}03\,p_0$ vorhanden.

Ein elastischer, unendlich großer Körper, der einseitig von einer Ebene begrenzt ist (Halbraum), wird durch eine auf einer Kreisscheibe dieser Ebene halbkugelförmig verteilte Belastung beansprucht. Es sollen die Spannungskomponenten für jeden im Körper beliebig gewählten Aufpunkt ermittelt werden.

Für die Spannungsberechnung in Punkten, die in genügender Entfernung von der belasteten Fläche liegen, kann man die Last durch eine in Mittelpunkt 0 wirkende Einzelkraft ersetzen (Bild 1) und die Lösung wird dann nach der einfachen Theorie von Boussinesq erhalten. Dagegen muß für Punkte in der Nähe der Druckfläche eine die Grenzbedingungen erfüllende Lösung der elastischen Grundgleichungen der allgemeineren Theorie von Hertz gesucht werden. Für Aufpunkte in der allernächsten Nachbarschaft der Druckfläche oder auf dieser selbst hat Professor L. Föppl, ausgehend von den Boussinesqschen Formeln, mittels eines Grenzüberganges gezeigt, daß die Normalspannung gleich dem an der betrachteten Stelle herrschenden Druckanteil ist[2]). Hier soll nun von diesen zwei Extremgebieten abgesehen und nur das Zwischengebiet behandelt werden, d. h. das Gebiet von einer passend gewählten Nachbarschaft der Druckfläche bis zu Entfernungen, bei denen die verteilte Belastung schon praktisch als Einzellast betrachtet werden darf.

Bei der kreissymmetrischen Druckverteilung werden die Spannungen, rings um die Lotrechte durch den Mittelpunkt, symmetrisch verlaufen. Daher führt man Zylinderkoordinaten ein, wobei die Symmetrieachse mit x, der Radius mit r und der Winkel mit a bezeichnet seien. Dann ist der Spannungszustand im Körper durch folgende vier Komponenten dargestellt: σ_x in der Richtung der Symmetrieachse, σ_t in der Richtung der Tangente, σ_r in der des Radius und τ die einzige Komponente der Schubspannung[3]). Wegen der achsialen Symmetrie genügt

[1]) Im Laufe der hochinteressanten Vorträge der Ingenieurkurse 1941 bei der Technischen Hochschule in München gab mir Herr Professor L. Föppl die Anregung zu dieser Arbeit. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen.
[2]) L. Föppl: Elastische Beanspruchung des Erdbodens unter Fundamenten. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 12 (1941), S. 36/37.
[3]) Z. B. A. Föppl: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Band 5 der Vorlesungen über Technische Mechanik. Leipzig 1918, S. 207/210.

es, wenn man den Verlauf dieser Spannungen nur in der Ebene eines Meridianschnittes bestimmt, so daß die Frage in zwei Dimensionen zu behandeln ist. In dem vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird sie nur für σ_x und τ erledigt, die in einem einfachen Verhältnis zueinander stehen.

I. Aufstellung des Doppelintegrals für σ_x.

Wenn eine einzige Last P in einem Punkt auf der Oberfläche des Körpers lotrecht wirkt (Bild 1), sind alle Spannungskomponenten im Aufpunkt A durch die Formeln von Boussinesq gegeben[4]):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x^3}{u^5}, & \sigma_r &= \frac{P}{2\pi}\left(\frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{u(u+x)}-\frac{3xr^2}{u^5}\right) \\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{m-2}{m}\left(\frac{x}{u^3}-\frac{1}{u(u+x)}\right), & \tau &= \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x^2 r}{u^5} \end{aligned}\right\} \quad . . . . (1),$$

wobei m die Poissonsche Konstante bedeutet.

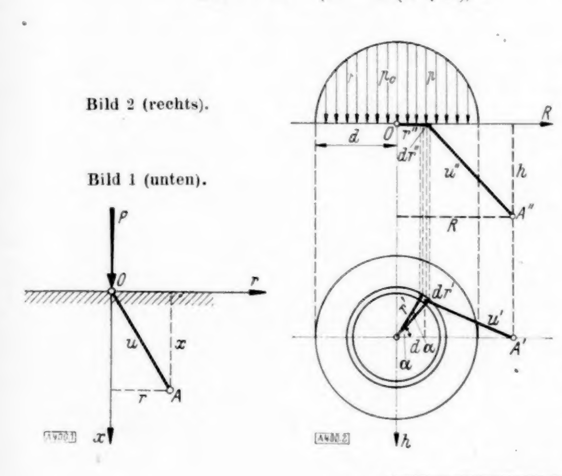


Bild 2 (rechts).

Bild 1 (unten).

Ein beliebiges Flächenelement der Druckfläche $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$ (Bild 2) überträgt die Belastung $p\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$. Sein Beitrag zur Druckspannung σ_x im Aufpunkte A ist nach der ersten Formel (1)

$$\mathrm{d}\sigma_x = \frac{3p\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\cdot\frac{h^3}{u^5} \quad . . . (2),$$

wo von jetzt an anstatt x die Bezeichnung h (Höhe des Aufpunktes) gebraucht wird.

Die Entfernung u des Aufpunktes vom Lastelement ist

$$u = \sqrt{(R - r\cos\alpha)^2 + h^2 + r^2\sin^2\alpha} \quad . . . . (3).$$

Wegen der halbkugelförmigen Druckverteilung ist der Druck p an einer beliebigen Stelle der Druckfläche durch die Formel

$$p = p_0\frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d} \quad . . . . (4)$$

gegeben, wobei p_0 sein Höchstwert ist.

Durch Integration über die ganze Druckfläche erhält man den Ausdruck

$$\sigma_x = \frac{3p_0 h^3}{2\pi d}\cdot\int_0^d\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha}{(R^2+r^2+h^2-2Rr\cos\alpha)^{5/2}} \quad . . . . (5)$$

für die von der ganzen Belastung in dem beliebig gewählten Aufpunkt A hervorgerufene Druckspannung. Dies Doppelintegral ergibt σ_x als Funktion von R und h, d. h. als Ortsfunktion in der Ebene des Meridianschnittes. Das Minuszeichen für σ_x in (1) ist, als Zeichen für „Druck" der Einfachheit halber fortgelassen.

II. Ausführung der ersten Integration.

Wir führen zuerst die Integration nach α aus, r bleibt konstant und zur Abkürzung sei gesetzt:

$$r\sqrt{d^2-r^2} = A, \qquad R^2+r^2+h^2 = B, \qquad 2Rr = C \quad . . . . (6).$$

[4]) Z. B. A. und L. Föppl: Drang und Zwang. Bd. 2, München 1920, S. 226; auch J. Love: A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity. Cambridge 1920, S. 189.

Abgesehen von dem gemeinsamen Faktor, nimmt das Integral über a allein die Form

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{A\cdot \mathrm{d}\,a}{(B-C\cos a)^{5/2}}=2\,A\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\,a}{(B-C\cos a)^{5/2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

an. Setzt man weiter

$$1-\frac{2\,C}{B+C}=\frac{B-C}{B+C}=a\,,$$

führt den Halbwinkel $\frac{a}{2}=\beta$ ein und dividiert Zähler und Nenner des Integranden durch $\cos^5\beta$, so geht das Integral nach einfacher Umrechnung über in

$$J=\frac{4\,A}{(B+C)^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\mathrm{tg}^2\,\beta)^{3/2}}{(a+\mathrm{tg}^2\,\beta)^{5/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\beta}{\cos^2\beta}=\frac{4\,A}{(B+C)^{5/2}}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{(a+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,x \quad \ldots \ldots (8),$$

wobei noch $x=\mathrm{tg}\,\beta$ gesetzt worden ist.

Eine teilweise Integration ergibt sofort [5])

$$\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x}{(a+x^2)^{5/2}}=\left[\frac{x\,(1+x^2)^{3/2}}{3\,a\,(a+x^2)^{1/2}}\cdot\left(\frac{1}{a+x^2}+\frac{2}{a}\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{x^2\,(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}\,x}{a\,(a+x^2)^{3/2}}-\int_0^{\infty}\frac{2\,x^2\,(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}\,x}{a^2\,(a+x^2)^{1/2}}$$

und durch Teilintegration des ersten Integrals erhält man daraus

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x}{(a+x^2)^{5/2}}&=\left[\frac{x\,(1+x^2)^{3/2}}{3\,a\,(a+x^2)^{1/2}}\cdot\left(\frac{1}{a+x^2}+\frac{2}{a}\right)\right]_0^{\infty}\\&\quad-\left[\frac{x^3\,(1+x^2)^{1/2}}{a^2\,(a+x^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{x^4\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{(a+x^2)\,(1+x^2)}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (9).$$

Das bleibende elliptische Integral ist auf eine Normalform zu bringen. Sein Radikand hat die imaginären Wurzeln

$$x_{1,2}=\pm\,i\,,\qquad x_{3,4}=\pm\,i\sqrt{a}\,,$$

hat also keine mehrfache Nullstelle, ist infolgedessen unreduzierbar.

Mit a war bereits der Bruch $\frac{B-C}{B+C}$ bezeichnet, dessen Variabilitätsbereich nach (6) $0<a<1$ ist. Danach ist der Modul des Integrals

$$k^2=1-a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Nach Ausführung aller Reduktionsprozesse [6]), nach Einsetzen des Endergebnisses in (9) und nach allen Umformungen bleibt auf der rechten Seite eine Summe, bestehend aus den elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung und dem störenden Glied

$$\left[\frac{1}{3\,a}\cdot\frac{(1-a)\,x}{a+x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{a+x^2}}\right]_0^{\infty}.$$

Dieses verschwindet für $x=0$, während für $x=\infty$ die Wurzel den Grenzwert Eins, der zweite Faktor den Grenzwert Null hat. Infolgedessen hat das ganze Glied den Grenzwert Null, so daß Formel (9) jetzt lautet:

$$\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{(a+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{a+2}{3\,a^2}\cdot Y_0-\frac{2-2\,a^2}{3\,a^2}\cdot Y_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

In den Reihendarstellungen der Normalintegrale Y_0 und Y_1 verschwinden alle Glieder bis auf das erste, welches im vorliegenden Falle den Wert $\frac{\pi}{2}$ erhält. Die Lösungen dieser Integrale sind dann:

---

[5]) Lösungsformeln für die dabei auftretenden einfacheren Integrale findet man z. B. in H. Egerer, Repetitorium der höheren Mathematik, München 1908, und E. Braby, Exercises méthodiques de Calcul Intégral. Paris 1922.

[6]) Siehe z. B. Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bd. 2. Leipzig 1911, oder auch Jahnke-Emde: Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1933.

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\cdots\right) \\ Y_1 &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}k^2+\frac{45}{384}k^4+\cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Nach Einsetzen in (11) und Zusammenaddieren der Koeffizienten, entsteht aus der rechten Seite die Reihe

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2+a+1}{3a^2}+\frac{3a^2+2a+1}{24a^2}k^2+\frac{5a^2+3a+1}{64a^2}k^4+\cdots\right),$$

die verhältnismäßig schnell konvergiert, wenn der Modul k^2 nicht nahe bei 1 liegt, das heißt nach (10), wenn h groß gegenüber R und r ist. In dem schlimmsten Fall $k=1$ ist die Reihe noch gut brauchbar, wenn es sich nur um Näherungslösungen handelt, denn der Zahlenwert des zweiten Gliedes beträgt höchstens ein Achtel von dem des ersten, und der des dritten Gliedes nur ein Zwanzigstel. Es würde dann in unserem Fall genügen, wenn wir die Reihe schon nach dem zweiten Glied abbrechen. Nach Einsetzen von k^2 aus (10) und Durchdividieren geht die Lösungsformel (11) in

$$\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{(a+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}\left(3+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}-a\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

über. Damit ist die Integration nach a von 0 bis 2π erledigt.

III. Ausführung der zweiten Integration.

Multipliziert man die rechte Seite von (13) mit dem Faktor $\frac{4A}{(B+C)^{5/2}}$ aus (8) und setzt für A seinen Ausdruck aus (6) ein, so entsteht der Integrand für die Integration nach r von 0 bis d. Nach allen zweckmäßigen Umformungen bekommt das zweite Hauptintegral die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \int_0^d J(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\Bigg\{3\cdot\int_0^d \frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{5/2}} + 3\cdot\int_0^d \frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r}{(B-C)(B+C)^{3/2}} \\ +3\int_0^d \frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r}{(B-C)^2\cdot\sqrt{B+C}} - \int_0^d \frac{(B-C)\sqrt{d^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r}{(B+C)^3\cdot\sqrt{B+C}}\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

wobei nach (6) B und C als gegebene Funktionen der Variable r mit den Parametern R und h zu denken sind.

Wegen $r < d$ ist die Konvergenz der Binomialreihe

$$\sqrt{d^2-r^2} = d - \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{d} - \frac{1}{8}\cdot\frac{r^4}{d^3} - \frac{1}{16}\cdot\frac{r^6}{d^5} - \cdots\cdots$$

genügend schnell, so daß man nur die ersten drei Glieder zu nehmen braucht. Das erste Integral von (14) zerfällt dann in die Summe

$$J_1 = d\int_0^d \frac{r\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{5/2}} - \frac{1}{2d}\int_0^d \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{5/2}} - \frac{1}{8d^3}\int_0^d \frac{r^5\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{5/2}}.$$

Da das vierte Integral noch in der Form

$$J_4 = J_1 - 4R\int_0^d \frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{7/2}}$$

geschrieben werden kann, erhält man für die Differenz $3J_1 - J_4$, wie sie in (14) steht, den Ausdruck

$$3J_1 - J_4 = 2J_1 + 4R\int_0^d \frac{\sqrt{d^2-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r}{(B+C)^{7/2}}.$$

Setzt man zur Abkürzung: $d + R = L$, $R^2 + h^2 = M$ und beachtet, daß $B + C = r^2 + 2\,R\,r + M$, $B - C = r^2 - 2\,R\,r + M$ ist, so kann man die obenstehende Integrale durch Substitutionen auf bekannte Typen zurückführen und vollständig integrieren [7]). Man erhält dann die Schlußformel

$$\left.\begin{aligned} 3\,J_1 - J_4 = {} & \frac{4\,R\,P}{5\,h^2}\left[\frac{L}{(L^2+h^2)^{5/2}} - \frac{R}{M^{5/2}}\right] - \frac{4\,R\,Q}{5}\left[\frac{1}{(L^2+h^2)^{5/2}} - \frac{1}{M^{5/2}}\right] \\ & + S\left[\frac{L}{(L^2+h^2)^{3/2}} - \frac{R}{M^{3/2}}\right] + T\left[\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}} - \frac{R}{\sqrt{M}}\right] - \frac{e}{3}\left[\frac{1}{(L^2+h^2)^{3/2}} - \frac{1}{M^{3/2}}\right] \\ & - c\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{M}}\right] + 2\,E\left[\sqrt{L^2+h^2} - \sqrt{M}\right] + f\cdot\ln\frac{L+\sqrt{L^2+h^2}}{R+\sqrt{M}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei:

$$P = \frac{1}{8\,d^3}\left(h^6 - 15\,R^2\,h^4 + 15\,R^4\,h^2 - R^6 + 24\,R^2\,h^2\,d^2 - 4\,R^4\,d^2 - 4\,h^4\,d^2 + 8\,R^2\,d^4 - 8\,h^2\,d^4\right)$$

$$Q = \frac{1}{8\,d^3}\left(6\,R^5 + 6\,R\,h^4 - 20\,R^3\,h^2 + 16\,R^3\,d^2 - 16\,R\,h^2\,d^2 - 16\,R\,d^4\right)$$

$$S = \frac{1}{60\,h^4\,d^3}\begin{pmatrix} 64\,R^3\,d^4 - 12\,R\,h^4\,d^2 - 32\,R^5\,d^2 - 8\,R^7 + 3\,R\,h^6 + 130\,R^3\,h^4 \\ - 25\,R^5\,h^2 - 28\,R^3\,h^2\,d^2 - 24\,R\,h^2\,d^4 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{60\,h^6\,d^3}\begin{pmatrix} 128\,R^3\,d^4 - 64\,R^5\,d^2 - 16\,R^7 - 240\,R^3\,h^4 - 4\,R\,h^4\,d^2 - 54\,R\,h^6 \\ + 200\,R^3\,h^4 - 50\,h^2\,R^5 + 40\,R\,h^4\,d^2 - 56\,h^2\,R^3\,d^2 - 48\,R\,h^2\,d^4 \end{pmatrix}$$

$$e = \frac{1}{4\,d^3}\left(8\,d^4 - h^4 + 4\,d^2\,h^2 - 14\,R^2\,h^2 + 20\,R^2\,d^2 + 35\,R^4\right)$$

$$c = \frac{1}{2\,d^3}\left(h^2 - 2\,d^2 + R^2\right), \qquad E = -\frac{1}{8\,d^3}, \qquad f = \frac{3\,R}{4\,d^3}.$$

Die bleibenden zwei Integrale J_2 und J_3 in (14) sind viel zu kompliziert und würden sicher zu einer noch längeren und schwerer brauchbaren Schlußformel als (15) führen. Im folgenden werden diese Integrale, für eine Anzahl Werte der Parameter R und h nach der Simpsonschen Regel berechnet. Die entsprechenden Werte für $(3\,J_1 - J_4)$ werden aus (15) ermittelt und nach (8) und (5) werden schließlich Zahlenwerte für σ_x gewonnen, mit welchen man die „Gleichspannungskurven" konstruieren kann.

IV. Ergebnisse.

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir für die Grenze d die Einheit ein, und messen r, R und h nach dieser Einheit ab. Das Intervall von Null bis Eins sei dann in vier Teile zerlegt ($n = 4$), so daß man die Integranden für die Werte $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ von r auszurechnen hat, da sie für $r = 0$ und $r = 1$ verschwinden. Die Ergebnisse der ganzen Rechnung sind in Zahlentafel 1 zusammengefaßt.

Zahlentafel 1. Für σ_x = Zahlenwert $\times\, p_0$.

R \ h	½	1	2	3	4	5	6
0	0,81	0,5	0,2	0,11	0,06	0,039	0,028
½	0,61	0,41	0,17	0,095	0,056	0,037	0,026
¾	0,37	0,33	0,153	0,082	0,05	0,035	0,025
1	0,2	0,214	0,125	0,072	0,047	0,033	0,024
1½	0,06	0,075	0,07	0,058	0,04	0,029	0,022
2	0,0053	0,024	0,048	0,043	0,0336	0,025	0,0192
3	—	0,0038	0,0126	0,019	0,0237	0,02	0,016

Auf Bild 3 sind die entsprechenden Kurven aufgezeichnet, wobei R als Parameter gewählt ist. In Bild 4 dagegen ist h als Parameter gewählt. Auf Grund dieser Diagramme sind die Gleichspannungskurven für σ_x im Bild 5 konstruiert worden. Man hat dabei auch das unberechnete Gebiet zwischen $h = 0$ und $h = {}^1/_2$ teilweise ausgefüllt, indem man sich darauf gestützt hat, daß jede Kurve in den gleichwertigen Kraftvektor münden muß. Damit ist natürlich nur eine grobe Annäherung erreicht und deshalb sind die Kurven dort punktiert ausgezogen.

[7]) Man benutze dazu etwa die unter [5]) zitierten Werke.

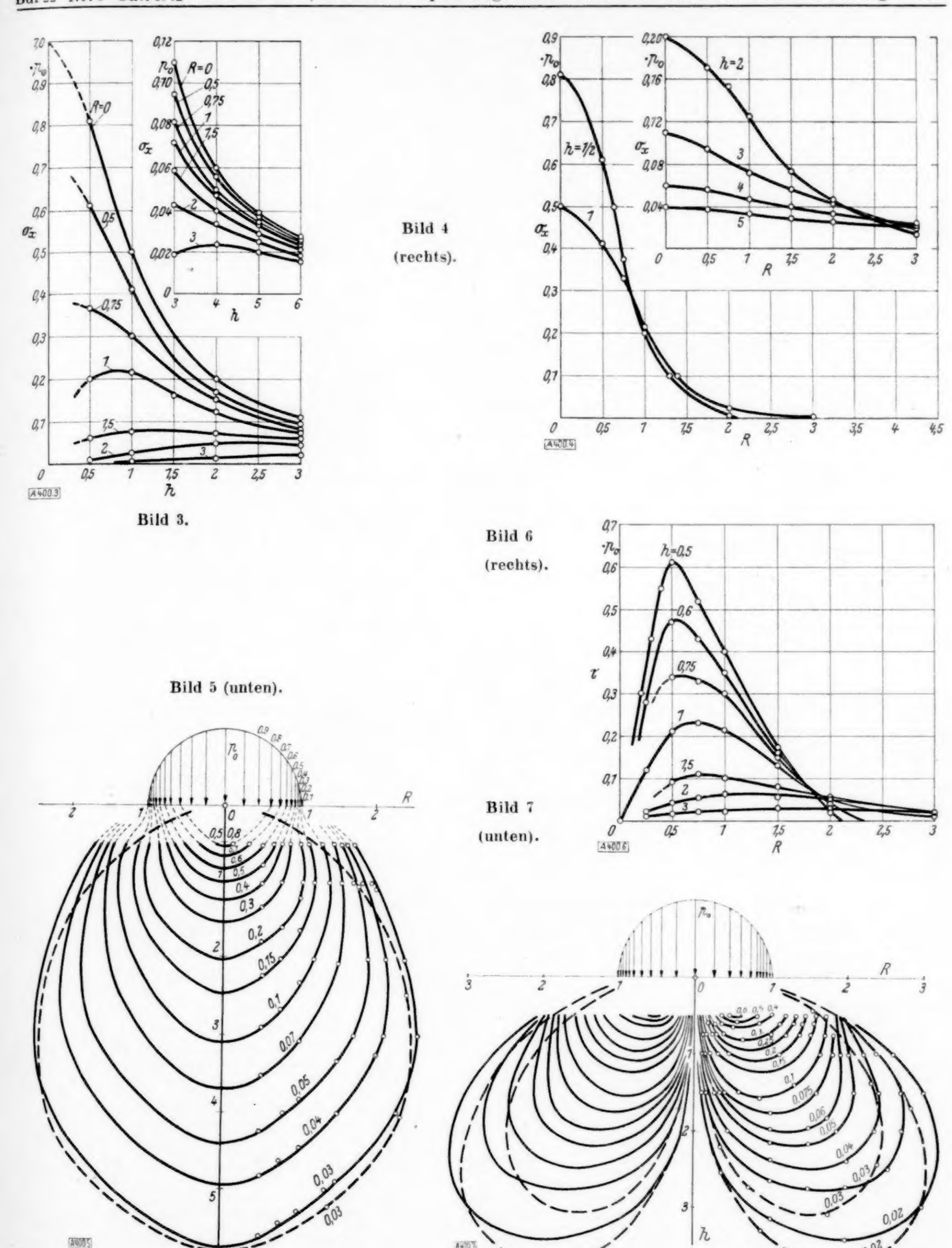


Bild 3.

Bild 4 (rechts).

Bild 6 (rechts).

Bild 5 (unten).

Bild 7 (unten).

Jeder Kurve in dem Meridianschnitt entspricht im Halbraum eine Rotationsfläche der Punkte gleicher Spannung. Man sieht jetzt, daß mit wachsender Entfernung von 0 die Spannungsflächen allmählich die Gestalt einer ellipsoidartigen Fläche annehmen.

Wir wollen noch zum Vergleich eine Spannungsfläche angeben, wenn anstatt der verteilten Belastung eine gleichwertige Einzellast P im Punkte 0 wirkt. So hat man z. B. für $\sigma_x = 0{,}03\, p_0$ nach (1) die Gleichung

$$0{,}03\, p_0 = \frac{3\,P}{2\,\pi} \cdot \frac{h^3}{(R^2 + h^2)^{5/2}}\,.$$

 Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 Nr. 5 Okt. 1942

Nach Bild 2 und mit Rücksicht auf (4) erhält man zwischen P und p_0 die Beziehung

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^1 p\, r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = p_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r \,\mathrm{d}r = \frac{2}{3} \pi p_0 .$$

Durch den Einsatz $h = u \cdot \sin \omega$, $R = u \cdot \cos \omega$ sei das Polarkoordinatensystem mit Anfang in 0 und Winkel ω zwischen R und u eingeführt, so daß obige Gleichung die Form

$$u^2 = 33{,}3 \sin^3 \omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

annimmt.

Die entsprechende σ_x-Kurve ist im Bild 5 strichweise aufgezeichnet, indem man einige Punkte von ihr aus (16) errechnet hat, nämlich

ω	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
u	0	0,765	2,04	3,46	4,7	5,45	5,8

Bei dem gewählten Wert $0{,}03\, p_0$ verlaufen beide Kurven schon ziemlich nahe beieinander, ausgenommen in der Nähe der Grenzfläche. Bei noch kleinerem Spannungswerte wird der Unterschied zwischen ihnen weiter abnehmen bis bei großer Entfernung die Kurven zusammenfallen.

Von der Fläche $\sigma_x = 0{,}03\, p_0$ nach außen würde es sich also kaum lohnen, den Spannungsverlauf auf Grund der verteilten Belastung zu berechnen, denn man würde fast auf die gleichen Ergebnisse kommen, die man nach der einfachen Formel von Boussinesq erhält, wenn die Belastung als Einzellast in 0 wirkt.

Zum Schluß wollen wir noch den räumlichen Verlauf der Schubspannung τ bestimmen. Dank dem sehr einfachen Verhältnis, in welchem beide Spannungen σ_x und τ zueinander stehen, ist diese Aufgabe durch die bisherigen Rechnungen zum größten Teil schon mitgelöst worden. Aus der ersten und vierten Formel (1) folgt direkt (Minuszeichen fortgelassen)

$$\tau = \sigma_x \frac{r}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

und danach wurden die τ-Werte aus den bereits bekannten σ_x-Werte errechnet, Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2. Für τ = Zahlenwert $\times\, p_0$.

h \ R	0	0,1	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4
0,5	0	0,17	0,37	0,61	0,52	0,4	0,18	0,021	0	0
0,6			0,28	0,47	0,43	0,35	0,16			
0,75				0,34	0,325	0,3	0,15	0,04	0	
1			0,12	0,21	0,23	0,214	0,131	0,05	0,0114	0
1,5				0,083	0,11	0,1	0,08	0,053	0,02	
2			0,023	0,042	0,058	0,063	0,056	0,05	0,019	
3			0,01	0,016	0,021	0,024	0,03	0,029	0,019	

Die Kurven mit h als Parameter sind im Bild 6 aufgetragen. Daraus entnimmt man die Koordinaten R und h der Punkte gleicher Schubspannung und konstruiert die Gleichspannungskurven für τ im Bild 7.

Eine einfache Überlegung führt zu dem Schluß, daß die τ-Kurven bei ihrem weiteren Verlauf in der Nachbarschaft der Grenzfläche sich schließen müssen. Mit wachsendem τ-Werte nehmen die Umfangslängen der Kurven ständig ab, bis an der Stelle der größten Schubspannung die entsprechende Kurve sich auf einen Punkt zusammenzieht.

Dieser liegt offenbar zwischen dem obersten Kurvenstück ($\tau = 0{,}6\, p_0$) und der Druckfläche, links und rechts im Bild 7. Dem entspricht im Halbraum der Kreis der maximalen Schubspannung. Um diesen Kreis herum verlaufen alle, der Kurven entsprechenden τ-Flächen in der Gestalt von Torusartigen Flächen, indem sie sich oberhalb des Kreises sehr stark zu der Druckfläche verdichten. Dagegen, sie dehnen sich weiter auseinander bei abnehmendem τ-Werte unterhalb des Kreises.

Wie oben für σ_x, wollen wir auch hier zum Vergleich einige τ-Flächen ermitteln, die von der gleichwertigen Einzellast in 0 herrühren. Z. B. für $\tau = 0{,}02\,p_0$ erhält man nach (1)

$$0{,}02\,p_0 = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{h^2\cdot R}{u^5}$$

oder in Polarkoordinaten

$$u^2 = 50\cdot\cos\omega\cdot(1-\cos^2\omega) \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

und daraus die Zahlenwerte

ω	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
u	0	1,96	3,28	4,2	4,32	3,47	0

Wiederholt man die Rechnung noch für $\tau = 0{,}03\,p_0$, so erhält man für u die entsprechenden Werte:

0, 1,6, 2,68, 3,42, 3,53, 2,84, 0.

Die Kurven sind gestrichelt im Bild 7 aufgetragen. Man sieht, daß sie mit den gleichwertigen Kurven von der verteilten Belastung nicht so gut übereinstimmen wie in dem Fall für σ_x. Eine Übereinstimmung im gleichen Maße ist hier bei noch kleinerem Spannungswerte zu erwarten. 400

Harmonische Analyse diskreter Zahlenreihen.

Von Dr.-Ing. *Erich Rud. Berger* z. Zt. im Felde.

Es wird ein Verfahren angegeben, mit Hilfe der bekannten Abminderungsfaktoren die Koeffizienten der Trigonometrischen Interpolation instrumentell zu bestimmen. Für die Koeffizienten der Interpolation vom Grade k wird eine Beziehung aufgestellt, die auf einfache Weise den Abminderungsfaktor τ^k zu berechnen gestattet. Schließlich werden die Formeln angegeben, mit deren Hilfe man den Harmonischen Analysator auch zur Harmonischen Synthese verwenden kann.

Wenn man von einer periodischen Funktion nur m einzelne äquidistante Ordinaten herausgreift, kann man diese diskreten Funktionswerte in verschiedener Weise interpolieren. Man kann sie z. B. durch Stücke von Kurven k-ter Ordnung verbinden, die mit den ersten $k-1$ Ableitungen stetig aneinanderstoßen. Die Koeffizienten der daraus sich ergebenden Fourier-Reihe bezeichnen wir mit a_n^k und b_n^k. Dieses Verfahren heiße Interpolation k-ter Ordnung.

Man kann aber auch an Stelle der Integrations-Orthogonalität (in der Fourier-Entwicklung) die Summations-Orthogonalität verwenden und die m Punkte durch einen m-gliedrigen trigonometrischen Ausdruck interpolieren, dessen Koeffizienten sich nach den Besselschen Formeln berechnen. Quade und Collatz[1]) haben gezeigt, daß diese Trigonometrische Interpolation den Grenzwert der oben beschriebenen Verfahren bildet und daher als „Interpolation von der Ordnung unendlich" zu betrachten ist. Wir wollen diese Koeffizienten daher mit a_n^∞ und b_n^∞ bezeichnen.

Die Trigonometrische Interpolation ist im allgemeinen die vorteilhafteste Methode, da sie erstens als einzige einen endlichen Ausdruck liefert (die anderen Methoden liefern unendliche Reihen), zweitens die gegebenen Funktionswerte genau wiedergibt (die Reihen konvergieren nur dagegen), und da sie drittens die glatteste Kurve liefert; denn die höheren Harmonischen fehlen darin vollkommen. Dietsch und Rotzeig[2]), die dem Geradenzug den Vorzug geben wollen, gehen von falschen Voraussetzungen aus. Nach Quade und Collatz[1]) ist jedoch dann die Interpolation n-ter Ordnung günstiger, wenn die ersten $n-1$ Ableitungen der gegebenen Funktion stetig sind, die n-te aber unstetig ist, wozu allerdings zu ergänzen wäre: wenn die Unstetigkeitsstellen bekannt sind und es möglich ist, sie sämtlich auf Gitterpunkte zu legen.

[1]) Quade und Collatz: Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen; Sitzg.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Math.-Naturw. Kl. XXX (1938), S. 383 bis 429.

[2]) Dietsch und Rotzeig: Eine neue Methode zur exakten Berechnung der Fourier-Koeffizienten; Gerlands Beitr. z. Geoph. Bd. 38 (1933), S. 276 bis 281.

Kennt man die Koeffizienten für eine Art der Interpolation, kann man sie für jede andere Art aus diesen berechnen, denn alle diese Koeffizienten sind untereinander proportional; die Proportionalitätskonstanten sind die sogenannten Abminderungsfaktoren τ:

$$a_n^k = \tau_n^k \cdot a_n^\infty \qquad b_n^k = \tau_n^k \cdot b_n^\infty \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Diese Formeln gelten nur für $n < \frac{m}{2}$. Die höheren Harmonischen hängen mit den niedrigeren zusammen durch die Beziehung

$$n^{k+1} \cdot a_n^k = (\pm \nu)^{k+1} \cdot a_\nu^k \qquad n = g \cdot m \pm \nu \quad \ldots \ldots \quad (2a),$$

wobei g eine beliebige ganze Zahl ist. Ebenso ist für die sin-Koeffizienten

$$n^{k+1} \cdot b_n^k = \pm (\pm \nu)^{k+1} \cdot b_\nu^k \quad \ldots \ldots \quad (2b).$$

Die bekannten rechnerischen Verfahren der harmonischen Analyse (Schema-Verfahren) liefern unmittelbar die Koeffizienten a_n^∞ und b_n^∞. In den oben erwähnten (nur selten vorkommenden) Sonderfällen kann man die Koeffizienten a_n^k und b_n^k mit Hilfe der Abminderungsfaktoren aus a_n^∞ und b_n^∞ berechnen.

Bei den immer mehr in Aufnahme kommenden instrumentellen Verfahren der harmonischen Analyse schlägt man den umgekehrten Weg ein. Man verbindet die gegebenen Punkte durch einen gebrochenen Streckenzug und umfährt ihn mit dem harmonischen Analysator; das Instrument liefert dann die Koeffizienten a_n^1 und b_n^1, aus denen man die günstigeren Koeffizienten a_n^∞ und b_n^∞ nach der Formel

$$a_n^\infty = \frac{a_n^1}{\tau_n^1} = a^1 \cdot \left(\frac{r\pi}{\sin r\pi}\right)^2 \qquad b_n^\infty = \frac{b_n^1}{\tau_n^1} = b_n^1 \cdot \left(\frac{r\pi}{\sin r\pi}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

berechnen kann, wobei $r = \frac{n}{m}$ gesetzt ist. Es ist aber zu beachten, daß für $m = 2z$ und $n = z$

$$a_z^\infty = 2 \cdot a_z^1 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad b_z^\infty = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3'),$$

denn es ist zwar

$$\sum_1^{2z} {}^g \cos^2 n g \frac{\pi}{z} = \frac{1}{2} \sum_1^{2z} {}^g \left(1 + \cos 2 n \pi \frac{g}{z}\right) = z,$$

weil die zweite Summe verschwindet, aber

$$\sum_1^{2z} {}^g \cos^2 z g \frac{\pi}{z} = \sum_1^{2z} {}^g (1) = 2z.$$

In analoger Weise erklärt sich das Verschwinden von b_z^∞.

Auf diese Unregelmäßigkeit ist in keiner der zitierten Arbeiten hingewiesen. Sie ergibt sich aber ohne weiteres auch aus den Besselschen Formeln. Bei ungeradem m tritt sie nicht auf.

Für $n > \frac{m}{2}$ sind alle Koeffizienten gleich Null $\ldots \ldots$ (3'').

Es drängt sich nun die Frage auf, warum diese Koeffizienten verschwinden, die ja im Streckenzug alle noch vorhanden waren. Das erklärt sich daraus, daß eine Komponente von der Ordnung $m - \nu$ $\left(0 < \nu < \frac{m}{2}\right)$ nicht zu unterscheiden ist von einer gleich starken Komponente der Ordnung ν mit negativer Phase, weil die Differenz

$$\cos[(m - \nu) x + \psi] - \cos(\nu x - \psi) = -2 \sin \frac{m x}{2} \sin\left[\left(\frac{m}{2} - \nu\right) x + \psi\right]$$

an allen Gitterpunkten $x = g \cdot \frac{2\pi}{m}$ verschwindet. Entsprechendes gilt für die höheren Frequenzen $m + \nu$ usw.

Die verschiedenen Interpolationen unterscheiden sich nun dadurch, daß die höheren Frequenzen in immer stärkerem Maße durch niedrigere ersetzt werden, bis zum Schluß die Interpolation von der Ordnung unendlich, die Trigonometrische Interpolation, nur mehr die niedrigsten Komponenten enthält. Es muß daher die Beziehung gelten

$$a_n^\infty = a_n^k + a_{m-n}^k + a_{m+n}^k + a_{2m-n}^k + a_{2m+n}^k + + \cdots \quad (4\,a),$$

$$b_n^\infty = b_n^k - b_{m-n}^k + b_{m+n}^k - b_{2m-n}^k + b_{2m+n}^k - + \cdots \quad (4\,b),$$

$$a_z^\infty = 2\left(a_z^k + a_{3z}^k + a_{5z}^k + \cdots\right) \quad (4\,a'),$$

das ist ein Sonderfall von a_n^∞;

$$a_0^\infty = a_0^k + a_m^k + a_{2m}^k + a_{3m}^k + \cdots \quad (4\,a'')$$

das ist evident, da $a_0^k = a_0^\infty$ ist, und alle weiteren Glieder verschwinden; für die

$$b_z^k,\quad b_{3z}^k,\quad b_{5z}^k,\quad \cdots \quad (4\,b') \qquad \text{und} \qquad b_m^k,\quad b_{2m}^k,\quad b_{3m}^k,\quad \cdots \quad (4\,b'')$$

gilt keine derartige Beziehung, da jede dieser Harmonischen an sämtlichen Gitterpunkten verschwindet.

Zusammen mit (1) und (2) ergibt sich daraus

$$a_n^\infty = a_n^\infty \cdot \tau_n^k \cdot n^{k+1}\left\{\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{[-(m-n)]^{k+1}} + \frac{1}{[+(m+n)]^{k+1}} + \frac{1}{[-(2m-n)]^{k+1}} + \cdots\right\},$$

daher mit $r = \frac{n}{m}$ $\left(r < \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{\tau_n^k} = r^{k+1}\cdot\left\{\cdots + \frac{1}{(r-2)^{k+1}} + \frac{1}{(r-1)^{k+1}} + \frac{1}{r^{k+1}} + \frac{1}{(r+1)^{k+1}} + \cdots\right\} \quad (5).$$

Aus (4 b) folgt dieselbe Gleichung.

Für $k = 1$, $\tau_k^1 = \left(\frac{\sin r\pi}{r\pi}\right)^2$ ergibt das

$$\cdots + \frac{1}{(r-2)^2} + \frac{1}{(r-1)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} + \cdots = \left(\frac{\pi}{\sin r\pi}\right)^2 \quad (6).$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch durch Differenzieren der bekannten Partialbruch-Zerlegung für $\pi \operatorname{ctg} r\pi$. Allgemein ist

$$\frac{1}{\tau_n^k} = \frac{(-r)^{k+1}}{k!}\cdot\frac{d^k}{d\,r^k}\left(-\pi \operatorname{ctg} r\pi\right) \qquad r = \frac{n}{m} \quad (7).$$

Für die Stufenkurve ($k = 0$) gilt diese Formel nicht. Hier liegen nämlich die Sprungstellen nicht auf den Gitterpunkten, sondern in der Mitte dazwischen. Interpoliert man in dieser Art, was für beliebig hohe Grade möglich ist, so ergeben sich Abminderungsfaktoren $\bar\tau$ nach der Formel

$$\frac{1}{\bar\tau_n^k} = \frac{(-r)^{k+1}}{k!}\cdot\frac{d^k}{d\,r^k}\left(-\pi \operatorname{cosec} r\pi\right) \qquad r = \frac{n}{m} \quad (8).$$

Der Abminderungsfaktor stellt eine Beziehung her zwischen einer Reihensumme (a_n^∞) und einem Integral (a_n^k). Diese Beziehung gilt nicht nur für ganzzahlige n, sondern für beliebige Werte, da man sie ohne Verwendung der Periodizität durch partielle Integration ableiten kann (Sprungstellenmethode [3])). Man kann daher Reihensummen bestimmen, indem

[3]) Köhler und Walter: Harmonische Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten. Arch. El. Techn. Bd. 25 (1931), S. 747.

man das ihnen entsprechende Integral instrumentell auswertet. Eine praktische Anwendung davon wurde soeben beschrieben. Eine zweite ist die Verwendung des Harmonischen Analysators zur Harmonischen Synthese. Es ist nämlich

$$a_n^\infty = \frac{2}{m} \sum y \cos n x = \left(\frac{r\pi}{\sin r\pi}\right)^2 a_n^1 \quad \ldots \quad (9\text{a})$$

$$b_n^\infty = \frac{2}{m} \sum y \sin n x = \left(\frac{r\pi}{\sin r\pi}\right)^2 b_n^1 \quad \ldots \quad (9\text{b}).$$

Dabei berechnet sich m aus den Schritten, mit denen x springt:

$$m = \frac{2\pi}{\Delta x} \qquad r = \frac{n}{m} = \frac{n \cdot \Delta x}{2\pi}.$$

Man kenne nun von einer Funktion $F(n)$ die Fourier-Koeffizienten A_ξ und B_ξ. Die ersten k von den A_ξ werden über ξ aufgetragen (dabei ist $\Delta\xi = 1$), durch einen Streckenzug verbunden, der bei A_0 beginnt und bei $A_{k+1} = 0$ endet. Dabei ist für A_0 der doppelte Wert einzusetzen, so daß das konstante Glied von $F(n)$ gleich $A_0/2$ ist. Analysiert man nun diesen Streckenzug und ergibt sich dabei der cos-Koeffizient α_n, so ist nach (9a) der gerade Teil von $F(n)$:

$$U(n) = \sum A_\xi \cos \xi n = \pi \left(\frac{n/2}{\sin n/2}\right)^2 \alpha_n \quad \ldots \quad (10\text{a}).$$

Ebenso ist nach (9b), wenn man die B_ξ aufträgt und bei der Analyse die sin-Koeffizienten β_n erhält, der ungerade Teil von $F(n)$:

$$V(n) = \sum B_\xi \sin \xi n = \pi \left(\frac{n/2}{\sin n/2}\right)^2 \beta n \quad \ldots \quad (10\text{b})$$

$$F(n) = U(n) + V(n) \quad \ldots \quad (11).$$

Um dabei eine dichte Wertefolge in n zu erhalten, muß man ein Instrument verwenden, das gestattet, die Periodenlänge stetig zu verändern. Von den handelsüblichen Instrumenten erfüllt nur der Analysator Mader-Ott diese Bedingung.

Die Periodenlänge, die man am Instrument einzustellen hat, ist bei Verwendung des N-ten Zahnrades $P = \frac{2\pi}{n} N$, im ξ-Maßstab gemessen. Man kann daher nicht in der Umgebung von $n = 0$ arbeiten. Man beschränkt sich zweckmäßig auf das Gebiet $\frac{\pi}{2} \leqq n \leqq \pi$. Für die Abszissen $0 \leqq n \leqq \frac{\pi}{2}$ formt man um $n = \pi - \bar{n}$, wobei sich die Koeffizienten folgendermaßen verändern:

$$\bar{A}_\xi = (-)^\xi A_\xi \qquad \bar{B}_\xi = (-)^{\xi+1} B_\xi \quad \ldots \quad (12).$$

Man arbeitet dann in der gleichen Weise wie oben, im Abschnitt $\frac{\pi}{2} \leqq \bar{n} \leqq \pi$, d. h. $\frac{\pi}{2} \geqq n \geqq 0$. Den Rest der Periode untersucht man im Gebiet $-\pi \leqq n \leqq 0$; hier gilt die Relation

$$F(-n) = U(n) - V(n) \quad \ldots \quad (11').$$

Damit sind sämtliche Werte $-\pi \leqq n \leqq +\pi$ untersucht.

Die kürzeste bei diesem Verfahren auftretende Periode ist $P_{\min} = 2N$. Um k Glieder zu summieren, muß man den Bereich $\xi = 0$ bis $\xi = k + 1$ analysieren; dazu benötigt man ein Zahnrad $N \geqq \frac{k+1}{2}$.

Die längste vorkommende Periode ist $P_{\max} = 4N$. Der ξ-Maßstab ist so zu wählen, daß man damit den größten am Instrument einstellbaren Wert nicht überschreitet. 388

Über die praktische Integration ebener Vektoren.

Von *S. v. Borbély* in Kolozsvár.

Es wird ein Verfahren zur zeichnerischen Integration eines von einer reellen Veränderlichen abhängigen Integrales einer komplexen Funktion gegeben, das die Durchführung der Konstruktion direkt in der komplexen Ebene gestattet, ohne dabei durch Komponentenzerlegung auf zwei reelle Integrationen zurückgreifen zu müssen.

Bei manchen Aufgaben der praktischen Mathematik kommt als selbständige Fragestellung — Integration der Hodographenkurve, praktische Auswertung komplexer Linienintegrale, Bestimmung der Fourierkoeffizienten usw. — oder als Zwischenkonstruktion — z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen in Polarkoordinaten — die Aufgabe vor eine, von einer skalaren Veränderlichen t abhängige komplexe Funktion $w(t) = |w(t)|\, e^{i\varphi(t)}$ zu integrieren. Dabei ist es von Interesse, die Integration tatsächlich in der komplexen Zeichenebene der Funktion $w(t)$ auszuführen, ohne daß man dabei durch Komponentenzerlegung auf zwei reelle Integrationen zurückgreifen müßte. Das konstruktive Gegenstück des im Reellen — wegen seiner Einfachheit, und nur durch die Fehler der zeichnerischen Durchführung eingeschränkten Genauigkeit — so vielseitig verwendeten Rungeschen Integrationsverfahrens fehlt im Komplexen. Dies ist an und für sich nicht verwunderlich, handelt es sich doch bei der konstruktiven Bestimmung des Integrals $R(t)\, e^{i\vartheta(t)} = \int^{t} w(t)\, \mathrm{d}t$ um die Lösung der folgenden beiden Differentialgleichungen

$$\vartheta + \operatorname{arctg}\left(R \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}R}\right) = \vartheta + \chi = \varphi(t),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R^2\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)^2 = |w(t)|^2,$$

aus denen die unbekannten Funktionen $R(t)$, $\vartheta(t)$ bei praktisch gegebener rechten Seite, abgesehen von Sonderfällen, exakt nur durch schrittweise Annäherung bestimmt werden können.

Im Gegensatz zum komplizierten Bau obiger Gleichungen ist ihre komplexe Integralkurve durch sehr einfache Tatsachen gekennzeichnet.

Die erste stellt eine Richtungsbedingung der Integralkurve dar, daß nämlich ihre Tangentenrichtung in jedem ihrer Punkte mit der Richtung des entsprechenden Integrandenvektors übereinstimmt; die zweite gibt die Parameterbezifferung der Integralkurve in der Form an, daß ihre Bogenlänge S gleich dem Integral des Absolutbetrages des Integranden ist. Demnach erhalten wir eine erste Näherung der Integralkurve, indem wir obige Bedingungen längs eines Polygons zu erfüllen trachten. Zu diesem Zweck teilen wir den Integranden durch die Teilpunkte t_λ, und bestimmen nach Runge aus $S = \int_{t_0}^{t} |w|\, \mathrm{d}t$ $S_\lambda = \int_{t_{\lambda-1}}^{t_\lambda} |w|\, \mathrm{d}t$, dann zeichnen wir das Polygon $T_0 A_1 T_1 A_2 \ldots A_\lambda T_\lambda A_{\lambda+1}$, wobei $\overline{A_\lambda T_\lambda A_{\lambda+1}} \parallel \varphi(t_\lambda)$ und $|\overline{T_\lambda A_{\lambda+1}}| = U_\lambda = |\overline{A_{\lambda+1} T_{\lambda+1}}| = U_{\lambda+1} = S_{\lambda+1}/2$ gesetzt wird.

Dieses Polygon erfüllt an den diskreten Stellen T_λ exakt beide Bedingungen der Integralkurve, die mit den Berührungspunkten T_λ in sie einbeschriebene Kurve dagegen dort exakt nur die Richtungsbedingung, nicht aber die Bedingung der vorgeschriebenen Bogenlänge. Wollten wir diese erste Näherung verbessern, so müßten wir die Lage der Punkte T_λ so abändern, daß für die neue Kurve unter Einhaltung der Richtungsbedingung $\widehat{T_0 T_\lambda} = \sum_{i=1}^{\lambda} S_i$ sein soll, wobei außer dem Umstand, daß die Abtragung der Bogenlänge praktisch eine sehr unbequeme Zwischenkonstruktion darstellt, auch der Umstand wesentlich ungünstig ist, daß wir über die vorzunehmenden Verschiebungen der Berührungspunkte T_λ keine Anhaltspunkte besitzen, bei der Verbesserung also auf ein mehr oder minder geschicktes Probieren angewiesen sind.

Selbst wenn wir aus dem Integral durch Reihenentwicklung die zu der richtigen Integralkurve zugehörigen Abschnitte des Tangentenpolygons berechnen, erhalten wir nur dann konstruktiv einfach zu verwertende Ergebnisse, wenn wir uns mit einer Näherung zweiter Ordnung begnügen.

Wir wollen uns im folgenden immer auf den Winkel φ als unabhängige Integrationsvariable beziehen, und schreiben $\int w(t)\, \mathrm{d}t = \int r(\varphi)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi$, wobei $r(\varphi) = \frac{|w|}{\varphi'}$ gesetzt ist.

Wie leicht nachzuprüfen, liefert der Ansatz

$$\int\limits_{\varphi_\lambda}^{\varphi_\lambda+\Delta} r(\varphi)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = U_\lambda(\Delta)\, e^{i\varphi_\lambda} + U_{\lambda+1}(\Delta)\, e^{i(\varphi_\lambda+\Delta)} \quad \text{mit} \quad U_{\lambda+1} = U_\lambda + \Delta U_\lambda,$$

$$U_\lambda = \frac{\Delta}{2}\left[r(\varphi_\lambda) + \frac{1}{3} r'(\varphi_\lambda)\,\Delta + \frac{1}{12}\left(r(\varphi_\lambda) + r''(\varphi_\lambda)\right)\Delta^2 + ((\Delta^3))\right],$$

$$U_{\lambda+1} = \frac{\Delta}{2}\left[r(\varphi_\lambda) + \frac{2}{3} r'(\varphi_\lambda)\,\Delta + \frac{1}{12}\left(r(\varphi_\lambda) + 3 r''(\varphi_\lambda)\right)\Delta^2 + ((\Delta^3))\right],$$

oder

$$U_\lambda = \frac{\Delta}{2}\left[r(\varphi_\lambda) + 2\,\Delta_{1/3\;1/6}\, r(\varphi_\lambda) + \frac{1}{12} r(\varphi_\lambda)\,\Delta^2 + ((\Delta^3))\right], \qquad \Delta U_\lambda = \frac{\Delta}{2}\cdot\frac{\Delta_{1/2\;0}}{3}\, r(\varphi_\lambda),$$

mit

$$\Delta_{1/2\;0}\, r(\varphi_\lambda) = r\left(\varphi_\lambda + \frac{\Delta}{2}\right) - r(\varphi_\lambda), \qquad \Delta_{1/3\;1/6}\, r(\varphi) = r\left(\varphi_\lambda + \frac{\Delta}{3}\right) - r\left(\varphi_\lambda + \frac{\Delta}{6}\right).$$

Da $\Delta_{1/3\;1/6}\, r\cdot\Delta^2$ und $\Delta_{1/2\;0}\, r\cdot\Delta^2$ von der Größenordnung Δ^3 ist, können wir mit einer Genauigkeit bis auf Glieder zweiter Ordnung in Δ schreiben

$$U_\lambda = \varkappa\frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{\Delta^2}{12}\right)\left[\frac{r(\varphi_\lambda) + 2\,\Delta_{1/3\;1/6}\, r(\varphi_v)}{\varkappa}\right], \qquad \Delta U_\lambda = \varkappa\frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{\Delta^2}{12}\right)\left[\frac{\Delta_{1/2\;0}\, r(\varphi_\lambda)}{3\varkappa}\right].$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke sind leicht aus der Kurve des Integranden abzugreifen, mit ihnen wird das Tangentenpolygon schrittweise gezeichnet. Die Zahlenwerte der Koordinaten der Punkte T_λ erhalten wir dann nach Multiplikation der Millimeterkoordinaten dieser Punkte mit dem Maßstabsfaktor $\varkappa\frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{\Delta^2}{12}\right)$.

Obwohl diese Konstruktion schon ziemlich genaue Ergebnisse liefert, befriedigt sie in zweifacher Weise nicht.

Erstens kann es bei dieser Näherung sehr wohl vorkommen, daß die Ungenauigkeit der Grundformel größer ausfällt, als es die zeichnerisch erreichbare Genauigkeitsgrenze zuläßt.

Zweitens sind im allgemeinen die Werte $r(\varphi_\lambda)$ gegenüber der Korrekturgröße $\Delta r(\varphi_\lambda)$ sehr groß. Ist die Korrekturgröße noch bequem abgreifbar, so wächst die Zeichnung schon nach einigen Schritten über die Abmessungen unseres Zeichenbogens. Wollen wir das durch entsprechende Wahl von $\varkappa$ verhindern, so erhalten wir die Korrekturgrößen als kaum auftragbare Bruchteile unserer Einheit, die jedoch nicht zu vernachlässigen sind, da es auf sie, wegen der schrittweisen Fehlersummation, wesentlich ankommt.

Aus diesen Gründen versuchen wir die Aufgabe von einer anderen Seite aus, einer befriedigenden Lösung zuzuführen.

Betrachten wir die Krümmung K der Integralkurve, so ergibt sich unter Berücksichtigung obiger Differentialgleichungen und der Gleichung $\operatorname{cotg}\chi = \frac{R'}{R\vartheta'}$

$$K = \frac{\vartheta'(R'^2 + R^2\vartheta'^2) - (\operatorname{cotg}\chi)' R^2\vartheta'^2}{|w|^3} = \frac{\vartheta'|w|^2 + \left(1 + \frac{R'^2}{R^2\vartheta'^2}\right) R^2\vartheta'^2\chi'}{|w|^3} = \frac{\vartheta' + \chi'}{|w|} = \frac{\varphi'}{|w|} = \frac{1}{r(\varphi)}.$$

Die Evolute der Integralkurve ist also dadurch gekennzeichnet, daß sich ihre Bogenlänge als Differenz der entsprechenden Absolutbeträge des Integranden darstellen läßt, wobei alle ihre Tangenten auf die entsprechenden Vektoren des Integranden senkrecht stehen.

Ist insbesondere der Integrand ein Kreis um den Nullpunkt des Koordinatensystems, so schrumpft die Evolute des Integrals auf einen Punkt zusammen, die Integralkurve wird wiederum ein Kreis mit demselben Radius.

Könnten wir also die Integration der Funktion $r(\varphi)\, e^{i\varphi}$ abschnittsweise auf die Integration von $r(\Phi)\, e^{i\varphi}$ zurückführen, wobei $\Phi = \text{const}$ ein in dem betrachteten Abschnitt passend bestimmter Mittelwert der Variablen bedeutet, so hätten wir damit das komplexe Gegenstück der Rungeschen Methode gefunden. Es ist leicht einzusehen, daß im Komplexen eine solche einfache Abgleichung nicht möglich ist. Betrachten wir nämlich die Abweichung eines abgleichenden Kreises von der gegebenen Funktion, so müßte bei exaktem Abgleichen $\int\limits_{\varphi_\lambda}^{\varphi_\lambda+\Delta} [r(\varphi) - r(\Phi)]\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = 0$ gelten. Deuten wir das Integral als Summe der ebenen Zentralkräfte vom absoluten Betrag $[r(\varphi) - r(\Phi)]$, so kann Φ so gewählt werden, daß entweder die auf einen passenden mittleren Radius bezogene Summe der Kraftkomponenten, oder die auf eine mittlere Tangente bezogene Komponentensumme verschwindet, nicht aber (im allgemeinen) gleichzeitig beide zusammen.

Da meistens die Komponentensumme in Richtung des mittleren Radius überwiegt, werden wir die Abgleichung nach diesem Gesichtspunkt durchführen, es bleibt aber dann als zweite Konstruktion noch immer die Erfassung der unberücksichtigten Querkraftkomponenten bestehen.

Diese beiden Konstruktionen so zu vereinigen, daß sie in einem Arbeitsgang mit praktischer Genauigkeit durchgeführt werden können, ist unser Ziel. Setzen wir die Reihenentwickung des Integrals in der Form an

$$\int_0^{\Delta} r(\varphi)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = r\left(\frac{\Delta}{2}\right) \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi + a\,\Delta^3 + b\,\Delta^4 + \cdots,$$

so ergeben sich für die ersten beiden Koeffizienten

$$a = \frac{1}{8}\,[r''(0) + 2\,i\,r'(0)], \qquad b = \frac{1}{48}\,[r'''(0) - 2\,r'(0) + 3\,i\,r''(0)].$$

Die Querkraftkomponenten gehen erst in die Glieder dritter und höherer Ordnung der Entwicklung durch das Auftreten komplexer Konstanten ein. Die Berücksichtigung dieser Glieder ist praktisch notwendig. Sie werden im allgemeinen bei den mir bekannten Konstruktionen zu Unrecht vernachlässigt. Dadurch werden zwar z. B. die Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen in Polarkoordinaten wesentlich vereinfacht, die so gewonnenen Ergebnisse können jedoch numerisch nur als rohe Annäherungen gelten, bei denen auch eine evtl. durchgeführte Verbesserung durch wiederholte Annäherungen, wegen dieses Fehlers der Grundkonstruktion, nur eine scheinbare ist.

Eine Darstellung der Korrekturgröße bis einschließlich der Glieder vierter Ordnung in Δ erhalten wir leicht nach dem Ansatz mit Gewichten

$$\left(m_1 \frac{\Delta r}{\Delta} + m_2 \frac{\Delta^2 r}{\Delta^2}\right) \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \quad \text{falls} \quad m_1 = \frac{i\,\Delta^2}{12}, \; m_2 = \frac{\Delta^2}{6} \text{ gesetzt wird.}$$

Es gilt also nach einer einfachen Umrechnung

$$\int_0^{\Delta} r(\varphi)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}\left[r(\Delta) + 4\,r\left(\frac{\Delta}{2}\right) + r(0)\right] \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi + \frac{i\,\Delta}{12}\,[r(\Delta) - r(0)] \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi + ((\Delta^5))$$

oder

$$\int_0^{\Delta} r(\varphi)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = \left[r(0) + \frac{2}{3}\,\Delta_{1/2\,0}\, r + \frac{1}{6}\,\Delta_{10}\, r\right] \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi + \frac{i\,\Delta}{\varkappa \cdot 12}\,[\varkappa\,\Delta_{10}\, r] \int_0^{\Delta} e^{i\varphi}\, \mathrm{d}\varphi + ((\Delta^5)),$$

die wir der zeichnerischen Integration im Komplexen zugrunde legen wollen.

Wir teilen den Integranden durch die Winkel $\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda\,\Delta$. Für jedes dieser Intervalle stellt unsere Formel zwei Integrationen über mittlere Kreissegmente dar, wobei der erste Teil die Integration über die Radialkomponenten, der zweite in erster Näherung die Korrektur der Querkomponenten liefert. Beschränken wir uns auf Intervallbreiten $\Delta = 0{,}1 \ldots 0{,}2$, so liegt die Genauigkeit der Formel selbst bei wiederholter Anwendung noch über der erreichbaren Zeichengenauigkeit.

In Bild 1 sind zwei Schritte der Konstruktion dargestellt. T_λ sei der Ausgangspunkt der Konstruktion. Wir ziehen durch T_λ die Normale N_λ zu φ_λ und tragen auf ihr den mittleren Radius $R_\lambda = r_\lambda + \frac{2}{3}\,\Delta_{1/2\,0}\, r_\lambda + \frac{1}{6}\,\Delta_{10}\, r_\lambda$ des Intervalles $\varphi_\lambda \ldots \varphi_{\lambda+1}$ ab, wobei die Vorzeichen der Differenzen sorgfältig zu beachten sind. Der so gewonnene Punkt M_λ ist der Krümmungsmittelpunkt der ersten Integralkurve. Durch M_λ wird die Normale $N_{\lambda+1}$ zu $\varphi_{\lambda+1}$ gelegt und die Integralkurve dieses Intervalls bis zur Normalen $N_{\lambda+1}$ (Kreisbogen $\widehat{T_\lambda T'_{\lambda+1}}$) gezeichnet. Von $T'_{\lambda+1}$ tragen wir auf der Normalen $N_{\lambda+1}$ den mittleren Radius $R_{\lambda+1}$ des Intervalls $\varphi_{\lambda+1} \ldots \varphi_{\lambda+2}$ ab, durch den Punkt $M_{\lambda+1}$ wird $N_{\lambda+2} \perp \varphi_{\lambda+2}$ gelegt, danach der Kreisbogen $\widehat{T'_{\lambda+1} T'_{\lambda+2}}$ gezeichnet usw. Genau so erfolgt die Konstruktion des zweiten (Querkraft-)Integrals, nur liegen dabei die Normalen $n_\lambda \parallel$ zu φ_λ, und die entsprechenden Krümmungsradien der einzelnen Integrale sind $\varkappa\,\Delta_{10}\, r_\lambda$. Die Vektoren $\overline{T_\lambda K_{\lambda+1}}$, $\overline{T_\lambda K_{\lambda+2}}$ geben die Richtung der Verschiebung der Punkte $T'_{\lambda+1}$, $T'_{\lambda+2}$ infolge Berücksichtigung der Querkraftkomponenten an, der Absolutbetrag dieser Verschiebung ergibt sich aus $|\overline{T_\lambda K_{\lambda+1}}|$ nach Multiplikation mit dem Maßstabsfaktor $\frac{\Delta}{\varkappa \cdot 12}$. Indem wir an die Punkte $T'_{\lambda+1}$ diese

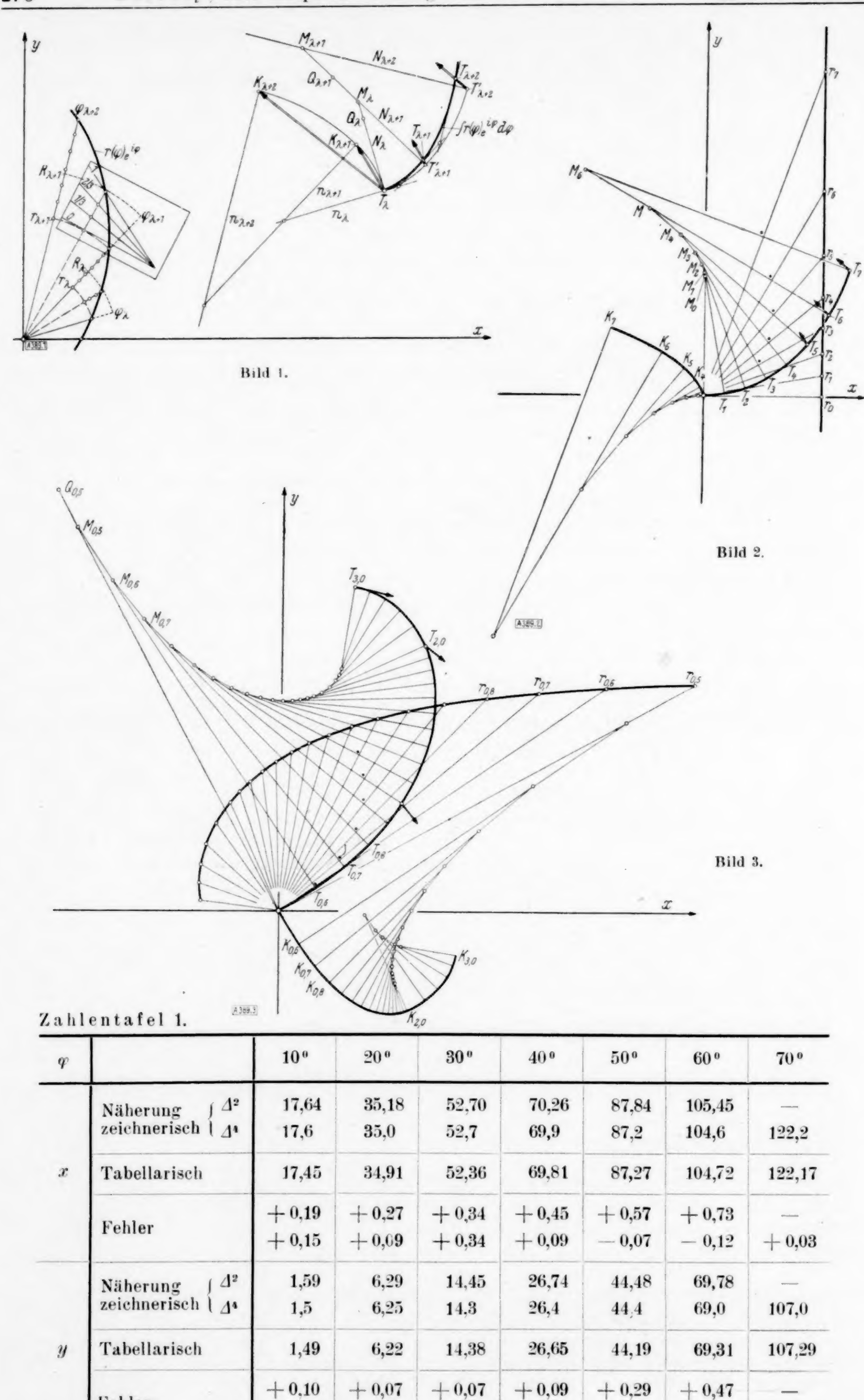


Bild 1.

Bild 2.

Bild 3.

Zahlentafel 1.

φ		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
x	Näherung zeichnerisch Δ^2	17,64	35,18	52,70	70,26	87,84	105,45	—
	Näherung zeichnerisch Δ^4	17,6	35,0	52,7	69,9	87,2	104,6	122,2
	Tabellarisch	17,45	34,91	52,36	69,81	87,27	104,72	122,17
	Fehler	+ 0,19	+ 0,27	+ 0,34	+ 0,45	+ 0,57	+ 0,73	—
		+ 0,15	+ 0,09	+ 0,34	+ 0,09	− 0,07	− 0,12	+ 0,03
y	Näherung zeichnerisch Δ^2	1,59	6,29	14,45	26,74	44,48	69,78	—
	Näherung zeichnerisch Δ^4	1,5	6,25	14,3	26,4	44,4	69,0	107,0
	Tabellarisch	1,49	6,22	14,38	26,65	44,19	69,31	107,29
	Fehler	+ 0,10	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,09	+ 0,29	+ 0,47	—
		+ 0,01	+ 0,03	− 0,08	− 0,25	+ 0,21	− 0,31	− 0,29

Korrektur anbringen, erhalten wir die bis auf Glieder vierter Ordnung genauen Integralpunkte $T_{\lambda+1}$. Im allgemeinen wird die Abweichung der Punkte $T'_{\lambda+1}$ und $T_{\lambda+1}$ klein sein, falls jedoch nötig, legen wir durch $T_{\lambda+1}$ die Tangenten der Integralkurve $\parallel$ zu $\varphi_{\lambda+1}$ und zeichnen mit Hilfe des so bestimmten Tangentenpolygons die gesuchte Integralkurve.

Es ist zweckmäßig auf N_λ erst $\overline{T_\lambda Q_\lambda} = r_\lambda$ abzutragen, die Teilung der entsprechenden Differenzen durch Anlegen eines auf Transparentpapier gezeichneten und die Teilung $^1/_3$ resp. $^2/_3$ tragenden Dreistrahlenwinkels durchzuführen, gleichzeitig die Teilgrößen in den Stechzirkel zu summieren und den Punkt M_λ durch Abtragung dieser Korrektur auf N_λ festzulegen. Falls während der Integration es zweckmäßig erscheinen sollte, von der Intervallbreite Δ zu der Intervallbreite $\Delta_1 = \mu\,\Delta$ überzugehen, so steht dem bei der Konstruktion der ersten Integralkurve nichts im Wege. Zur Wahrung des Maßstabsfaktors $\frac{\Delta}{\varkappa \cdot 12}$ der zweiten Integration müssen wir jedoch von da ab statt $\varkappa\,\Delta_{10}\,r_\lambda$ $\mu \cdot \varkappa\,\Delta_{10}\,r_\lambda$ als Krümmungsradius abtragen.

In Bild 2 ist die Konstruktion für $100 \int\limits_0^\varphi \frac{e^{i\varphi}}{\cos\varphi}\,d\varphi = x + i\,y$ mit der Intervallbreite $\Delta = 0{,}1745\,(10^\circ)$ für $\varphi = 0{,}0^\circ \ldots 70{,}0^\circ$ und der Einheit $E = 1$ mm durchgeführt. Gleichzeitig wurde diese Aufgabe nach der quadratischen Tangentennäherung in ca. 5 fachem Maßstab gelöst. Es ergaben sich die in Zahlentafel 1 mitgeteilten Werte.

In Bild 3 wurde $\int\limits_{0,5}^\varphi \frac{e^{i\varphi}}{\varphi}\,d\varphi$ mit $\Delta = 0{,}1$ im Intervall $\varphi = 0{,}5 \ldots 2{,}0$ und $\Delta = 0{,}2$ im Intervall $\varphi = 2{,}0 \ldots 3{,}0$ mit der Einheit $E = 200$ mm ermittelt. Dabei ergab sich ein mittlerer Fehler von ca. $0{,}5\,\%$.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß über die instrumentelle Erzeugung der Integralkurve auf Grund ihrer Evoluten- und Krümmungseigenschaften demnächst an anderer Stelle berichtet wird. 389

Eine einfache Reihentransformation bei einer sehr allgemeinen Fourierschen Reihe.

Von *Herbert Buchholz* in Berlin.

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldetechnik der AEG.)

Für eine Fouriersche Reihe mit dem allgemeinen Glied $x^p \cdot \cos p\varphi \cdot (p-a)^{-k}$ wird in der Arbeit eine Reihentransformation durchgeführt, die die Berechnung der Reihensumme besonders dann erleichtert, wenn x nur wenig kleiner als 1 oder gleich 1 ist und k eine reelle Zahl, die nicht wesentlich größer als 1 ist. Die Reihentransformation besteht im wesentlichen in der Verwandlung der vorgelegten Reihe in eine Potenzreihe nach x, die in gewissen Fällen noch ein logarithmenbehaftetes Glied enthalten kann. Die Koeffizienten der Reihe bilden in den einfacheren Fällen die Polynome von Bernoulli und Euler. Die allgemeine Transformationsformel schließt eine große Zahl bekannter Sonderfälle ein.

1. Allgemeines.

Bei der mathematischen Behandlung technischer und physikalischer Aufgaben wird man häufig auf Reihen der Form (I) oder (II) geführt, in denen die vier Parameter a, x, r und k durchweg reelle Größen

$$C_k^{(\pm)}(x, r; a) = \sum_{p=1}^{\infty} (\pm)^{p-1} \frac{\cos x\,p}{(p-a)^k} \cdot r^p \quad \text{(I)}, \qquad S_k^{(\pm)}(x, r; a) = \sum_{p=1}^{\infty} (\pm)^{p-1} \frac{\sin p\,x}{(p-a)^k} \cdot r^p \quad \text{(II)}$$

mit den Variabilitätsbereichen

$$0 \gtreqless |a| < 1, \quad x \geqq 0, \quad 0 \gtreqless r \begin{matrix} \leqq 1 \\ < 1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k > 0 \\ k \geqq 0 \end{matrix} \quad \text{sind.}$$

Trotzdem es sich wegen $\cos(\pi + x)\,p = (-)^p \cdot \cos(p\,x)$ zunächst zu erübrigen scheint, in den obigen Gleichungen nach den beiden Fällen $(+r)^p$ und $(-r)^p$ zu unterscheiden, wird es sich doch im Hinblick auf die späteren Ergebnisse empfehlen, hier an dieser Unterscheidung fest-

zuhalten. An den Angaben über die Schwankungsbereiche ist bei der Größe a nur wesentlich, daß es nicht gleich einer positiven ganzen Zahl sein darf. Für die Beweisführung könnte es sogar komplexe Werte haben. Wir werden jedoch der Einfachheit halber und in Rücksicht auf die praktischen Erfordernisse im folgenden bei der Annahme reeller Werte für a bleiben.

Ist in den beiden Reihen (I) oder (II) k eine genügend große Zahl und r nicht gerade in der Nähe von 1 gelegen, so macht die direkte Berechnung der Reihensumme nach Vorschrift dieser Gleichungen keine besondere Schwierigkeit. Liegt jedoch k etwa unterhalb von 5 und ist zudem r nur wenig kleiner oder gar gleich 1, so wird die Berechnung des Summenwertes der beiden Reihen schon recht mühselig, und sie wird es um so mehr, je kleiner k ausfällt. In solchen Fällen kann die hier aufzustellende Reihentransformation recht gute Dienste leisten. Außerdem gestattet sie für eine große Zahl bereits bekannter und auch neuer Formeln eine gemeinsame Herleitung. Bevor wir uns jedoch dem Beweise dieser Reihentransformation zuwenden, wird es ganz nützlich sein, erst noch auf die besonderen Fälle hinzuweisen, in denen man für die obigen Reihen eine geschlossene Summenformel schon kennt.

Rein äußerlich unterscheiden sich diese Summenformeln nach dem Merkmal, daß in der einen Gruppe der Ausdruck für die Summe die gleichen periodischen Eigenschaften zeigt wie die Reihenglieder selbst, während bei der zweiten Gruppe der Ausdruck für die Reihensumme nur für eine bestimmte Periode Anspruch auf Gültigkeit machen kann. An Formeln der ersten Art kennt man nur die beiden Formelpaare, die dem Fall $k=0$ und dem Fall $k=1$ und $a=0$

$$C_0^{(\pm)}(x,r;a)=\frac{1\mp r\cdot\cos x}{1\mp 2r\cdot\cos x+r^2}\quad .\ .\ (1.1\text{a}),\qquad S_0^{(\pm)}(x,r;a)=\frac{\pm r\cdot\sin x}{1\mp 2r\cdot\cos x+r^2}\quad .\ .\ (1.1\text{b})$$

entsprechen. Infolge des periodischen Charakters der rechtsstehenden Ausdrücke gelten diese

$$C_1^{(\pm)}(x,r;0)=\ln\frac{1}{\sqrt{1\mp 2r\cdot\cos x+r^2}}\quad (1.2\text{a}),\qquad S_1^{(\pm)}(x,r;0)=\pm\operatorname{arctg}\frac{r\cdot\sin x}{(1\mp r\cdot\cos x)}\quad .\ .\ (1.2\text{b})$$

Formeln für jedes positive und negative reelle x.

Von der zweiten Gruppe von Summenformeln sind die nachstehenden vier gleichfalls seit langem bekannt [1] [1]). Sie gelten jeweils nur innerhalb des hinter jeder Formel angegebenen Periodenintervalls, das in allen Fällen von der Länge 2π ist. Durch fortgesetzte Integration

$$S_1^{(+)}(x,1;0)=\frac{\pi-x}{2}\,(0<x<2\pi)\quad .\ .\ .\ (1.3\text{a}),\qquad S_1^{(-)}(x,1;0)=\frac{x}{2}\,(-\pi<x<+\pi).\quad .\ .\ (1.3\text{b}),$$

$$C_2^{(+)}(x,1;0)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\,(0\leqq x\leqq 2\pi)\ (1.4\text{a}),\qquad C_2^{(-)}(x,1;0)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}\,(-\pi\leqq x\leqq+\pi)\ (1.4\text{b}),$$

nach x lassen sich aus diesen Beziehungen beliebig viele weitere Summenformeln herstellen, die sich entweder auf die Funktion $S_{2n+1}^{(\pm)}$ oder auf die Funktion $C_{2n}^{(\pm)}$ beziehen. Alle diese Formeln sind auch noch an den Grenzen des Intervalls gültig, wenn die zugehörige Fouriersche Reihe im ganzen abgeschlossenen Intervall gleichmäßig konvergiert, und das ist bekanntlich immer dann der Fall, wenn $k>1$ ist. Damit hängt es auch zusammen, daß die auf der rechten Seite der letzten vier Gleichungen stehenden Ausdrücke für die Randwerte des Intervalls bei den beiden Gl. (1.3) verschiedene Werte ergeben, während sie bei den Gl. (1.4) zu gleichen Werten führen. Aus der im folgenden hergeleiteten Reihentransformation werden sich die Gl. (1.3) und (1.4) als einfache Sonderfälle ergeben.

2. Die Reihentransformation für die Funktionen $C_k^{(+)}$ und $S_k^{(+)}$.

Wir gehen zum Zwecke der Durchführung dieser Reihentransformation von der durch Gl. (2.1) definierten Reihe aus. In ihr soll wie vordem $0\lesseqgtr|a|<1$, $x\geqq 0$ und $k>0$ sein. Der Parameter β in (2.1) sei vorerst stets positiv und von Null verschieden. Die Reihe (2.1),

$$E_k^{(+)}(x,\beta;a)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-(\beta-ix)(p-a)}}{(p-a)^k}\qquad (i=\sqrt{-1})\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2.1)$$

die in der angeschriebenen Form auch als eine Dirichletsche Reihe aufgefaßt werden kann, ist dann sogar schon für jedes $k\geqq 0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Funktionen der Art wie $E_k^{(+)}$ wurden zum erstenmal von Lerch [2] untersucht, jedoch allein mit dem Ziel, für eine solche Funktion hinsichtlich des Parameters k eine Ergänzungsbeziehung zu finden, wie sie vordem von Riemann für die speziellere ζ-Funktion angegeben worden war.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttum-Verzeichnis am Schluß der Arbeit.

Nach dem Beispiel von H. Mellin [3] und [6] ersetzen wir in (2.1) die Exponentialfunktion durch die Integraldarstellung (2.2), die gültig ist für jedes z mit $|\operatorname{arc} z| < \pi/2$, also

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-c-\infty i}^{-c+\infty i} \Gamma(-s) \cdot z^s \cdot ds \quad (c > 0) \quad \ldots \quad (2.2)$$

sicherlich auch für ein $z = \beta - i x$ mit $\beta > 0$. Nach dem Einsetzen von (2.2) in (2.1) ist es dann unter den hier vorliegenden Voraussetzungen gewiß erlaubt [4], die Reihenfolge von Summation und Integration zu vertauschen, sofern die Integrationsabszisse c in (2.2) so gewählt wird und so gewählt werden kann, daß $\Re(k-s) > 1$ oder $c > 1 - k$ ausfällt. Das ist aber nach (2.2) jederzeit möglich und stellt überhaupt nur für ein $k < 1$ eine über die sowieso schon bestehende Vorschrift $c > 0$ hinausgehende Forderung dar. Im Hinblick auf die De-

$$\zeta(-s, 1-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1-a)^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^{-s}} \quad \Re(-s) > 1 \quad \ldots \quad (2.3)$$

finitionsgleichung (2.3) der von H. Mellin eingehend betrachteten verallgemeinerten ζ-Funktion [5] ist damit für die Funktion $E_k^{(+)}$ von Gl. (2.1) die Integraldarstellung (2.4) entstanden.

Nach Gl. (2.3) geht für ein $a = 0$ die Funktion $\zeta(-s, 1-a)$ in die gewöhnliche Rie-

$$E_k^{(+)}(x, \beta; a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-c-\infty i}^{-c+\infty i} \Gamma(-s)\zeta(-s+k, 1-a) \cdot (\beta - i x)^s \cdot ds \quad \left.\begin{matrix} c > 0 & \text{für } k \geqq 1 \\ c > 1-k & \text{für } 0 < k \leqq 1 \end{matrix}\right\} \quad (2.4)$$

mannsche ζ-Funktion $\zeta(-s, 1) = \zeta(-s)$ über. So wie diese besitzt auch die Funktion $\zeta(s, a)$ im endlichen Teil der s-Ebene nur die einzige singuläre Stelle $s = 1$, in deren Umgebung sie

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{s-1} - \Psi(a) + O(s-1) \quad \ldots \quad (2.5a)$$

sich gemäß der Gl. (2.5a) verhält. In den sehr weit entfernten Teilen der s-Ebene regelt sich das Verhalten der beiden Funktionen $\zeta(s)$ und $\zeta(s, a)$ überhaupt in merklich der gleichen Weise und wird dort durch die Gl. (2.5b) beschrieben, in der $s = \sigma + i \cdot \tau$ ist. Die Werte,

$$\zeta(s, a) \sim \zeta(s) \sim O\{|\tau|^{f[\sigma]} \cdot \ln|\tau|\} \quad \ldots \quad (2.5b)$$

$$\text{mit } f[\sigma] = \frac{1}{2} - \sigma \text{ für } \sigma \leqq 0 \qquad f[\sigma] = \frac{1}{2} \text{ für } 0 \gtreqless \sigma \leqq \frac{1}{2}$$

$$f[\sigma] = 1 - \sigma \text{ für } \frac{1}{2} \gtreqless \sigma \leqq 1, \quad f[\sigma] = 0 \text{ für } \sigma \geqq 1$$

$\ln|\tau|$ nur dann vorhanden, wenn $-\delta \gtreqless \sigma \leqq +\delta$ oder $1 - \delta \gtreqless \sigma \gtreqless 1 + \delta$, δ beliebig klein

die $\zeta(s, a)$ in den Punkten $s = +n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ annimmt, sind aus den Gl. (2.5c ... h) zu ersehen. Hierin sind die $B_{n/2}$ die Bernoullischen Zahlen, deren Werte in dieser Bezeichnung gleich null zu setzen sind für ungeradzahlige n, die $\varphi_n(a)$ die Bernoullischen Polynome in der Definition von P. E. Böhmer [7] und [8] und $B_n(a)$ dieselben Polynome in

$$n \cdot \zeta(1-n, a) = -B_n(a) = -\varphi_n(a) + (-)^{\frac{n}{2}} \cdot B_{n/2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \quad \ldots \quad (2.5c)$$

$$\text{mit } \varphi_1(z) = z - 1; \quad \varphi_n(0) = 0 \text{ für } n \geqq 2, \quad \varphi_n(1) = 0 \text{ für } n \geqq 1,$$

$$\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ und } \varphi_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-)^n \cdot (2^{2n} - 1)/2^{2n-1} \cdot B_n \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a \quad \ldots \quad (2.5d),$$

$$\zeta(n+1, a) = (-)^{n+1} \cdot \Psi^{(n)}(a)/n! \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \quad (2.5e),$$

$$\zeta(-n, 1-a) = (-)^{n+1} \cdot \zeta(-n, a) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \quad (2.5f),$$

$$\zeta(-n, 1-a) + (-)^n \cdot \zeta(-n, 1+a) = -(-a)^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \quad (2.5g),$$

$$\zeta(s, a+1) = -a^{-s} + \zeta(s, a) \quad \text{für jedes } s \quad \ldots \quad (2.5h)$$

der Definition des Tafelwerks von H. T. Davis [9] und $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Der Zusammenhang zwischen den Polynomen Bernoullis und den Bernoullischen Zahlen geht aus Gl. (2.5c) hervor.

Nach dieser notwendigen Abschweifung in die Theorie der verallgemeinerten ζ-Funktion untersuchen wir zunächst mit Hilfe der über sie mitgeteilten Formeln das Verhalten des Integranden von (2.4) in den sehr weit entfernten Teilen des Integrationsweges sowie der rechts davon gelegenen s-Halbebene. Wir schreiben zu diesem Zweck s vorübergehend in der Doppelform

$$s = R \cdot e^{i\chi} \qquad s = \sigma + i\tau$$

und haben demgemäß den Näherungswert des Integranden von (2.4) für $R \to \infty$ und für $|\chi| \leqq \pi/2$ zu bestimmen. Dabei wollen wir uns noch der ständigen Abkürzung bedienen

$$\beta - i x = \sqrt{s^2 + x^2} \cdot e^{-i\vartheta} \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \vartheta = x/\beta \quad \left(|\vartheta| < \frac{\pi}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2.6).$$

In Rücksicht auf die aus den Ergänzungssätzen der Γ- und ζ-Funktion folgenden Beziehung

$$\zeta(-s+k) \cdot \Gamma(-s) = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}(s-k)}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma(1+s-k)}{\Gamma(1+s)} \cdot \frac{\zeta(1+s-k)}{(2\pi)^{s-k}}$$

läßt sich dann mit diesen neuen Zeichen nach Gl. (2.5b) dem asymptotischen Näherungsausdruck für den Integranden von (2.4) die folgende Form geben:

$$\left.\begin{aligned} &|\Gamma(-s)\,\zeta(-s+k, 1-a) \cdot (\beta - x i)^s| \sim |\tau|^{f[1+\sigma-k]-k} \\ &\times \exp\left\{-R \cdot \sin|\chi| \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \cdot \operatorname{sgn}\chi\right) - R \cdot \cos\chi \cdot \ln\frac{2\pi}{\sqrt{x^2+\beta^2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2.7).$$

Ebenso wie das Integral (2.2) ist demnach auch das Integral (2.4) auf seinem Integrationsweg stets sogar absolut konvergent, solange $|\vartheta| < \pi/2$ und also $\beta > 0$ ist. Unter der zusätzlichen Bedingung $(x^2+\beta^2)^{1/2} < 2\pi$ verschwindet aber der Integrand von (2.4) auch auf dem unendlich fernen Halbkreis der rechten s-Halbebene. Wird daher der geradlinige, parallel zur imaginären Achse verlaufende Integrationsweg von (2.4) durch einen solchen Halbkreis zu einem geschlossenen Weg ergänzt, so liefert dieser Teil des Integrationsweges zum Wert des Integrals keinen Beitrag. Nun liegt aber rechts vom Integrationsweg von (2.4) einmal die unendliche Kette von einfachen Polen $s = 0, 1, 2, \ldots$, die alle von der Γ-Funktion herrühren. Sie haben das Residuum

$$(-)^{n+1}\, n! \cdot \zeta(-n+k, 1-a) \cdot (\beta - i x)^n.$$

Nach Gl. (2.5a) liegt aber daselbst auch noch der von der ζ-Funktion herstammende einfache Pol $s = k-1$ mit dem Residuum

$$-\Gamma(1-k) \cdot (\beta - i x)^{k-1}.$$

Für ein $k \neq n$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ besteht daher für die Funktion $E_k^{(+)}(x, \beta, a)$ die unter der Voraussetzung (2.8a) absolut konvergente Reihenentwicklung (2.8). Die für die Konvergenz

$$\sqrt{x^2+\beta^2} < 2\pi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2.8\text{a}). \qquad\qquad |\vartheta| = |\operatorname{arctg}(x/\beta)| < \pi/2 \, . \; . \; . \quad (2.8\text{b})$$

des Integrals (2.4) und für seinen Umformungsprozeß noch wesentliche Bedingung (2.8b) hat wegen $\chi = 0$ in (2.7) für die Reihe selbst keine Bedeutung mehr.

$$\left.\begin{aligned} E_k^{(+)}(x, \beta; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \cdot \zeta(k-n, 1-a) \cdot (\beta - x i)^n + \Gamma(1-k) \cdot (\beta - i x)^{k-1} \\ (k \neq 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (2.8).$$

Liegt der praktisch besonders wichtige Fall vor, daß k einer positiven ganzen Zahl gleich ist, so werden auf der rechten Seite von (2.8) sowohl das alleinstehende Glied als auch in der Reihe selbst das Glied für $n = k-1$ unendlich groß, und zwar mit entgegengesetztem Vorzeichen. Bestimmt man für $k \to n+1$ den Grenzwert dieser Differenz auf die gewöhnliche Weise oder berechnet man statt dessen direkt das Residuum des Integranden für den Doppelpol $u = k-1$, so entsteht im Falle eines **positiv ganzzahligen** Wertes von k für $E_k^{(+)}(x, \beta, a)$ die wiederum nur unter der Bedingung (2.8a) absolut konvergente Entwicklung (2.9). Der neben dem Strich am Summenzeichen dieser Formel stehende Zeiger

$$\left.\begin{aligned} E_k^{(+)}(x, \beta; a) = \sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)} \frac{(-)^n}{n!} \cdot \zeta(k-n, 1-a) \cdot (\beta - x i)^n \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ + \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (\beta - x i)^{k-1} \cdot \{\Psi(k) - \Psi(1-a) - \ln(\beta - x i)\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2.9)$$

soll dabei darauf hinweisen, daß bei der Bildung der Reihensumme das durch den Zeiger gekennzeichnete Reihenglied fortzulassen ist.

Zerlegt man in der Gl. (2.9) nach Multiplikation mit $e^{-a(\beta-ix)}$ beide Seiten in ihre reellen und imaginären Bestandteile und setzt sie einander gleich, so kommen unmittelbar die gewünschten Transformationsgleichungen zustande. Für ein positiv ganzzahliges k nehmen sie die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} e^{a\beta}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos p x}{(p-a)^k}\cdot e^{-\beta p} &= e^{a\beta}\cdot C_k^{(+)}(x, e^{-\beta}; a)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)}\frac{(-)^n}{n!}\cos(a x - n\vartheta)\cdot(x^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\zeta(k-n, 1-a)\\ &+\frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot(\beta^2+x^2)^{\frac{k-1}{2}}\cdot\{\cos(a x-\vartheta(k-1))\\ &\cdot\left[\Psi(k)-\Psi(1-a)-\ln\sqrt{x^2+\beta^2}\right]-\vartheta\cdot\sin(a x-(k-1)\vartheta)\}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (2.10),$$

$$\left.\begin{aligned} e^{a\beta}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin p x}{(p-a)^k}\cdot e^{-\beta p} &= e^{a\beta}\cdot S_k^{(+)}(x, e^{-\beta}; a)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\sin(a x - n\vartheta)\cdot(x^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\zeta(k-n, 1-a)\\ &+\frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot(\beta^2+x^2)^{\frac{k-1}{2}}\cdot\{\vartheta\cdot\cos(a x-\vartheta(k-1))\\ &-\sin(a x-\vartheta(k-1))\left[\Psi(1-a)+\ln\sqrt{x^2+\beta^2}-\Psi(k)\right]\}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (2.11).$$

Die Gültigkeit dieser beiden Gleichungen ist in Rücksicht auf die Konvergenz der rechtsstehenden Reihen nach wie vor an die Bedingung (2.11a) gebunden, während der durch die Gl. (2.11b) definierte Hilfswinkel ϑ, der in der Integraldarstellung (2.4) seinem Absolutwert

$$\sqrt{x^2+\beta^2}<2\pi\quad .\ .\ .\ .\ .\ (2.11\text{a}),\qquad \vartheta=\operatorname{arctg}(x/\beta)\quad(\beta\geqq 0)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (2.11\text{b})$$

nach kleiner als $\pi/2$ sein mußte, aus einem schon oben angegebenen Grunde in den obigen Reihen für $\beta\to 0$ auch gleich $\pi/2$ sein darf. Dabei muß nur gehörig auf das Vorzeichen von ϑ geachtet werden. Nach Gl. (2.11b) stimmt dieses Vorzeichen stets mit dem von x überein. Daraus geht einmal hervor, daß die Gl. (2.10) und (2.11) auf beiden Seiten in derselben Weise auf einen Vorzeichenwechsel von x reagieren. Diese Gleichungen sind also für jedes x gültig, das der Bedingung (2.11a) entspricht, sei es nun positiv oder negativ.

Die Gl. (2.11b) zeigt aber auch zugleich, wie im Grenzfall $\beta\to 0$ mit x und ϑ zu verfahren ist. Offenbar sind deren beide Grenzwerte dann nach den Gl. (2.12) zu bestimmen. Dadurch kommt man für $\beta\to 0$ von (2.10) und (2.11) her zu Gleichungen der folgenden Gestalt:

$$\sqrt{x^2+\beta^2}\to|x|<2\pi\quad .\ .\ .\ (2.12\text{a}),\qquad \vartheta\to\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}x\quad(\beta\to 0)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (2.12\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned} C_k^{(+)}(x,1;a) &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos p x}{(p-a)^k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\cos\left(a|x|-\frac{\pi n}{2}\right)\cdot|x|^n\cdot\zeta(k-n,1-a)\qquad \begin{matrix}0<|x|<2\pi\\ k=1,2,3,\ldots\end{matrix}\\ &+\frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot|x|^{k-1}\cdot\left\{\cos\left(a|x|-\frac{\pi(k-1)}{2}\right)\right.\\ &\left.\cdot\left[\Psi(k)-\Psi(1-a)-\ln|x|\right]-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(a|x|-\frac{\pi}{2}(k-1)\right)\right\}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (2.13),$$

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(+)}(x,1;a) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p x}{(p-a)^k} \qquad\qquad 0<|x|<2\pi,\; k=1,2,3,\ldots \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)} \frac{(-)^n}{n!} \cdot \sin\left(a|x| - \frac{\pi n}{2}\right) \cdot |x|^n \cdot \zeta(k-n, 1-a) \\ &+ \operatorname{sgn} x \cdot \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot |x|^{k-1} \cdot \left\{\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(a|x| - \frac{\pi(k-1)}{2}\right)\right. \\ &\left. - \sin\left(a|x| - \frac{\pi(k-1)}{2}\right)[\Psi(1-a) + \ln|x| - \Psi(k)]\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2.14).$$

Für $k \geqq 2$ gehört auch, wie man leicht erkennt, der Punkt $x=0$ zum Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen.

Als Beispiel möge für $k=1$ unter der wesentlichen Voraussetzung eines $a \neq 1$ mittels der Gl. (2.14) der Ausdruck (2.15) gebildet werden, um einmal auch auf diese Weise für ein

$$S_1^{(+)}(x,1;+a) + S_1^{(+)}(x,1;-a) = 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \cdot \sin p x}{p^2 - a^2} \quad \ldots \ldots \quad (2.15)$$

dem Intervall $0 \ldots 2\pi$ angehöriges x den Wert der in (2.15) auftretenden Summe zu bestimmen. Es gibt zwar, um sie zu ermitteln, einen einfacheren Weg als den hier beschriebenen, aber gerade darum bietet sich uns in dieser Aufgabe eine höchst erwünschte Möglichkeit der Prüfung. Nach einigen einfachen Zwischenrechnungen ergibt sich zunächst für die Summe von (2.15) die Darstellung

$$\begin{aligned} &-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \cdot \left\{\cos a x \cdot \sin \frac{\pi n}{2} \cdot [\zeta(1-n, 1-a) + \zeta(1-n, 1+a)]\right. \\ &\left. - \sin a x \cdot \cos \frac{\pi n}{2} \cdot [\zeta(1-n, 1-a) - \zeta(1-n, 1+a)]\right\} \\ &+ \pi \cdot \cos a x + \sin a x \cdot [\Psi(1+a) - \Psi(1-a)]. \end{aligned}$$

Nach Gl. (2.5g) hat aber hierin die angeschriebene unendliche Reihe den Summenwert $-(\sin a x)/a$, während andererseits die Beziehung gilt:

$$\Psi(1+a) - \Psi(1-a) = a^{-1} - \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi a \quad \ldots \ldots \quad (2.16).$$

Im ganzen kommt somit die Formel (2.17) zustande, die in der Tat zutrifft.

$$2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \cdot \sin p x}{p^2 - a^2} = \pi \cdot \frac{\sin \pi (a - x)}{\sin \pi a} \qquad (0 < x < 2\pi) \quad \ldots \ldots \quad (2.17).$$

Ein anderer wichtiger Sonderfall der Gl. (2.10) und (2.11) liegt vor für $a=0$ und $\beta=0$. In der unendlichen Reihe der Gl. (2.13) fallen dann alle in n ungeraden Glieder fort und in der Gl. (2.14) alle in n geraden Glieder. Wird dementsprechend $n=2m$ oder $2m+1$ gesetzt, so kommen wegen $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ die beiden folgenden Formeln zustande:

$$\left.\begin{aligned} C_k^{(+)}(x,1;0) &\equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos p x}{p^k} = \sum_{m=0}^{\infty}{}'^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{(-)^m}{(2m)!} x^{2m} \cdot \zeta(k-2m) \qquad 0<|x|<2\pi,\; k=1,2,3,\ldots \\ &+ \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot |x|^{k-1} \cdot \left\{\cos \frac{\pi(k-1)}{2} \cdot [\Psi(k) + C - \ln|x|] + \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi(k-1)}{2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2.18),$$

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(+)}(x,1;0) &\equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p x}{p^k} \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{m=0}^{\infty}{}'^{\left(\frac{k}{2}-1\right)} \frac{(-)^m}{(2m+1)!} \cdot |x|^{2m+1} \zeta(k-2m-1) \qquad 0<|x|<2\pi,\; k=1,2,3,\ldots \\ &+ \operatorname{sgn} x \cdot \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot |x|^{k-1} \left\{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}(k-1) - \sin \frac{\pi}{2}(k-1) [C - \ln|x| + \Psi(k)]\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2.19).$$

Beachtet man, daß nach Gl. (2.5c) wegen $\varphi_n(1)=0$ die Funktion $\zeta(-n)$ für alle $n=2,4,6,\ldots$ verschwindet, so kann es vorkommen, daß die beiden unendlichen Reihen, die in den obigen Gleichungen auftreten, bereits nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen, und zwar tritt das ein

bei der Gl. (2.18) für ein geradzahliges k,
bei der Gl. (2.19) für ein ungeradzahliges k.

Da gleichzeitig für die so beschaffenen k-Werte auch das mit $\ln|x|$ behaftete Glied zu Null wird, so reduziert sich in den angegebenen Fällen die rechtsstehende Gleichungsseite auf ein Polynom. Wir haben damit die Fälle vor uns, die schon im Abschnitt 1 bei den Gl. (1.3) und (1.4) erwähnt wurden. In der Tat, setzt man in (2.18) $k=2$ und in (2.19) $k=1$, so entstehen sofort die schon damals angegebenen Beziehungen für $C_2^{(+)}(x,1,0)$ und $S_1^{(+)}(x,1,0)$. Wir stellen diesen längst bekannten Formeln in den Gl. (2.20) und (2.21) die entsprechenden

$$C_1^{(+)}(x,1;0)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos p x}{p}=-\ln|x|+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m\cdot(2m)!}\cdot B_m=-\ln\left(2\cdot\sin\frac{|x|}{2}\right) \quad (0<|x|<2\pi) \quad . \quad . \quad (2.20),$$

$$S_2^{(+)}(x,1;0)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin p x}{p^2}=\operatorname{sgn} x\cdot|x|\cdot(1-\ln|x|)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m\cdot(2m+1)!}\cdot B_m \quad . \quad . \quad (2.21)$$

Entwicklungen für die Funktionen $C_1^{(+)}(x,1,0)$ und $S_2^{(+)}(x,1,0)$ gegenüber, von denen die erste in ihrem ganz rechtsstehenden Summenwert aus Gl. (1.2a) erschlossen werden kann.

Schließlich empfiehlt es sich im Hinblick auf die Anwendungen auch noch den Fall eines verschwindenden Wertes von x hervorzuheben. Die dafür geltende Beziehung leitet man am besten aus Gl. (2.10) her. Sie hat die Form von Gl. (2.22), und für nahe an Null gelegene Werte von β, für die die linksstehende Reihe bei kleinen Werten von k sehr schlecht

$$\left.\begin{aligned}e^{a\beta}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta p}}{(p-a)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}{}'^{(k-1)}\frac{(-\beta)^n}{n!}\zeta(k-n,1-a) \qquad k=1,2,3,\ldots\\ +\frac{(-\beta)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot[\Psi(k)-\Psi(1-a)-\ln\beta]=e^{a\beta}\cdot C_k^{(+)}(0,e^{-\beta};a)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2.22)$$

konvergiert, genügen für die numerische Berechnung mittels der rechtsstehenden Reihe nur wenige Glieder. Für $k=0$ entsteht aus Gl. (2.22) die bekannte Entwicklung für $\exp(a\beta)/(e^\beta-1)$.

Auch für ein von Null verschiedenes x kann aus den Gl. (2.10) und (2.11) wenigstens solange der gleiche Nutzen gezogen werden, als gemäß der Gl. (2.11a) $(x^2+\beta^2)^{1/2}$ klein bleibt gegenüber 2π. Selbst für ein $\beta=0$ wird dann aber die Konvergenz der eben aufgestellten Reihen schon recht mäßig, wenn x in der Nähe von π liegt. Da sich nun aber der bei solchen Werten von x ratsame Übergang von x zu $\pi-x$ in den Gl. (I) und (II) lediglich durch einen Vorzeichenwechsel der in p ungeraden Glieder kundtut, so liegt es nahe, um auch für Werte von x in der Nähe von π den Vorteil der Reihentransformation wahrnehmen zu können, die gleichen Untersuchungen wie an der Funktion $E_k^{(+)}$ auch an der Funktion $E_k^{(-)}$ anzustellen. Dabei werden wir uns wesentlich kürzer fassen können.

3. Die Reihentransformation für die Funktionen $C_k^{(-)}$ und $S_k^{(-)}$.

Wir gehen an die Untersuchung der Funktion $E_k^{(-)}$ von Gl. (3.1) unter denselben Annahmen über den Variabilitätsbereich der vier Parameter x, β, a und k heran wie bei der

$$E_k^{(-)}(x,\beta;a)=\sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p-1}\cdot\frac{e^{-(\beta-ix)(p-a)}}{(p-a)^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.1)$$

Funktion $E_k^{(+)}$ von Gl. (2.1) und ersetzen auch hierin wieder die Exponentialfunktion durch die Gl. (2.2). Die Substitution des Integrals in die gegebene Reihe führt dann diesmal nach der Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration auf die durch Gl. (3.2) definierte Variante der verallgemeinerten ζ-Funktion, die sich in der darin angebenen Art

$$\zeta^*(-s,1-a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(n+1-a)^{-s}}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-)^{p-1}}{(p-a)^{-s}}=2^s\left[\zeta\left(-s,\frac{1-a}{2}\right)-\zeta\left(-s,1-\frac{a}{2}\right)\right] \quad . \quad (3.2)$$

durch die Differenz von zwei der früher benutzten Funktionen mit zwei um den Wert 1/2 voneinander verschiedenen Parametern wiedergeben läßt. Die Schreibweise ζ^* für die hier zu verwendende ζ-Funktion gestattet ohne weiteres die rein formale Übertragung der schon im Abschnitt 2 gefundenen Beziehungen, so daß wir z. B. sofort für die Funktion $E_k^{(-)}$ von Gl. (3.1) die Integraldarstellung (3.3) anschreiben können.

$$E_k^{(-)}(x,\beta;a)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty}\Gamma(-s)\,\zeta^*(-s+k,1-a)\cdot(\beta-ix)^s\cdot ds \qquad \begin{matrix} c>0 \text{ für } k\geq 1\\ c>1-k \text{ für } 0<k\leq 1\end{matrix} \quad (3.3).$$

Aus der Erklärungsgleichung (3.2) der Funktion ζ^* ergibt sich zugleich, daß die Funktion $\zeta^*(s,1-a)$ in der ganzen endlichen s-Ebene regulär und analytisch oder m. a. W. eine ganze transzendente Funktion ist. Sie hat demnach im Gegensatz zur Funktion $\zeta(s,1-a)$ an der Stelle $s=1$ keinen Pol. Den früheren Gl. (2.5c ... h) stellen sich für sie die Gl. (3.4a ... e) an die Seite. Hierin hat $\varphi_n(a)$ dieselbe Bedeutung wie früher, während $E_{n-1}(a)$

$$n\cdot\zeta^*(1-n,a)=2^{n-1}\left[\varphi_n\left(\frac{1+a}{2}\right)-\varphi_n\left(\frac{a}{2}\right)\right]=n/2\cdot E_{n-1}(a) \quad (n=1,2,3,\ldots) \;.\;.\; (3.4a)$$

$$\text{mit } E_0(x)=1,\quad E_{2n}(0)=E_{2n}(1)=0,\quad E_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-)^n\cdot E_n/2^{2n},$$

$$E_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad E_{2n-1}(0)=-E_{2n-1}(1)=(-)^n\cdot(2^{2n}-1)\cdot B_n/n,$$

$$\zeta^*(0,a)=\frac{1}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\; (3.4b), \qquad \zeta^*(1,1)=\zeta^*(1)=\ln 2 \;.\;.\;.\;.\; (3.4b'),$$

$$\zeta^*(n+1,a)=(-1/2)^{n+1}/n!\cdot\left[\psi^{(n)}\left(\frac{a}{2}\right)-\psi^{(n)}\left(\frac{1+a}{2}\right)\right] \quad (n=0,1,2,3,\ldots) \;.\;.\; (3.4c),$$

$$\zeta^*(-n,1-a)=(-)^n\cdot\zeta^*(-n,a) \quad (n=0,1,2,3,\ldots) \;.\;.\; (3.4d),$$

$$\zeta^*(s,a+1)=a^{-s}-\zeta^*(s,a) \quad s \text{ beliebig} \;.\;.\;.\;.\;.\; (3.4e)$$

das Eulersche Polynom bedeutet in der Definition des schon erwähnten Tafelwerkes von H. T. Davis [9].

In den weit entfernten Teilen der s-Ebene zeigt die ζ^*-Funktion nach Gl. (3.2) im wesentlichen das gleiche Verhalten wie die ζ-Funktion mit dem einzigen Unterschied, daß wegen des Faktors 2^s in (3.2) in der entsprechenden asymptotischen Näherungsgleichung (2.7) unter dem Zeichen ln im Zähler nur der Faktor π steht. Mit dieser einzigen Änderung können die früheren Angaben über das Konvergenzverhalten des Integranden von (2.4) unverändert auch für den Integranden von (3.3) übernommen werden. Die daher auch hier wieder zulässige Anwendung des Residuensatzes auf das Integral (3.3) gestaltet sich jedoch im vorliegenden Fall trotz aller dieser Ähnlichkeiten wesentlich einfacher, da es diesmal in jedem Falle, es sei nun k ganzzahlig oder nicht, in der rechten s-Halbebene nur einfache Pole gibt. Es gilt daher im jetzigen Falle für jedes k die Entwicklung:

$$E_k^{(-)}(x,\beta;a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\zeta^*(k-n,1-a)\cdot(\beta-xi)^n \quad (x^2+\beta^2)^{1/2}<\pi \;.\;.\;.\; (3.5).$$

Nach Trennung der reellen und imaginären Bestandteile dieser Gleichung entstehen daraus die folgenden endgültigen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} e^{a\beta}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p-1}\frac{\cos px}{(p-a)^k}\cdot e^{-\beta p} &= e^{a\beta}\cdot C_k^{(-)}(x,e^{-\beta};a) \qquad (k\geq 0)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\zeta^*(k-n,1-a)\cdot(x^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\cos(ax-n\vartheta)\end{aligned}\right\} \quad (3.6),$$

$$\left.\begin{aligned} e^{a\beta}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p-1}\cdot\frac{\sin px}{(p-a)^k}\cdot e^{-\beta p} &= e^{a\beta}\cdot S_k^{(-)}(x,e^{-\beta};a) \qquad (k\geq 0)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\zeta^*(k-n,1-a)\cdot(\beta^2+x^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin(ax-n\vartheta)\end{aligned}\right\} \quad (3.7).$$

Dabei muß dann im vorliegenden Falle in Rücksicht auf die Konvergenz der rechtsstehenden Reihen die Bedingung (3.8a) erfüllt sein, während für ϑ wie vordem die Definitionsgleichung (3.8b) besteht.

$$\sqrt{\beta^2+x^2}<\pi \quad \ldots\ldots (3.8a), \qquad \vartheta=\operatorname{arctg}(x/\beta)<\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (3.8b).$$

Von den verschiedenen Sonderfällen, die in den Gl. (3.6) und (3.7) enthalten sind, wollen wir hier nur auf den Fall eingehen, wo $\beta=0$ ist. In der Vorzeichenfrage sind dabei die gleichen Vorsichtsmaßnahmen zu beachten wie früher. In einer für positive und negative x in gleicher Weise gültigen Schreibart ergibt sich dann aus (3.6) und (3.7) für $\beta=0$:

$$\left.\begin{aligned} C_k^{(-)}(x,1;a) &= \sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p-1}\frac{\cos p x}{(p-a)^n} \qquad (0\leqq|x|<\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\zeta^*(k-n,1-a)\cdot|x|^n\cdot\cos\left(a|x|-\frac{\pi n}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.9),$$

$$\left.\begin{aligned} S_k^{(-)}(x,1;a) &= \sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p-1}\frac{\sin p x}{(p-a)^k} \\ &= \operatorname{sgn} x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\cdot\zeta^*(k-n,1-a)\cdot|x|^n\cdot\sin\left(a|x|-\frac{\pi n}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.10).$$

Die besonderen Formeln, die hieraus für $a=0$ entstehen, brauchen wohl nicht angeführt zu werden. Wir heben von ihnen nur die beiden Gleichungen heraus, die unter der weiteren vereinfachenden Annahme eines $k=1$ gelten. Sie lauten im Hinblick auf die Gl. (3.4a) und (3.4b') wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} C_1^{(-)}(x,1;0) = \sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p+1}\frac{\cos p x}{p} = \ln 2-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\cdot\frac{B_m}{2m}\cdot(2^{2m}-1) = \ln\cos\frac{x}{2} \\ (0\leqq|x|<\pi)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (3.11),$$

$$S_1^{(-)}(x,1;0) = \sum_{p=1}^{\infty}(-)^{p+1}\frac{\sin p x}{p} = \frac{x}{2} \qquad (0\leqq|x|<\pi) \quad \ldots (3.12).$$

Der zuletzt angeschriebene Summenwert von Reihe (3.11) geht aus Gl. (1.2a) für $r=1$ hervor. Seine vorherige Kenntnis würde natürlich in diesem Einzelfall die Herleitung einer transformierten Reihe entbehrlich machen. Im übrigen zeigt sich, daß in dieser transformierten Reihe hier nichts anderes zu erblicken ist als die im Intervall $0\leqq x<\pi$ absolut konvergente Taylorsche Reihe für $\ln(\cos x/2)$. Für kleine Werte von x führt sie tatsächlich sehr schnell zu einem gut brauchbaren Näherungswert. Für die Reihe (3.12) hat sich durch die Reihentransformation unmittelbar der schon früher angegebene Summenwert von Gl. (1.3b) ergeben.

Für die numerische Berechnung von Reihen nach Art der Gl. (I) und (II) bestehen damit im Falle kleiner oder verschwindender β-Werte die folgenden beiden Möglichkeiten: für Werte von x in der Nähe von 0 bis über $\pi/2$ hinaus erfolgt sie am besten mittels der Gl. (2.10) und (2.11) und ihren Abwandlungen. Für Werte von x in der Nähe von π werden dagegen mit größerem Vorteil die Reihen (3.5) und (3.6) benutzt. Eine praktische Nutzanwendung der hier mitgeteilten Formeln wird u. a. in einer Arbeit des Verfassers gemacht, die inzwischen im Septemberheft der Zeitschrift für technische Physik erschienen ist.

4. Schlußbemerkungen.

Zu der Frage der numerischen Berechnung von Reihen nach Art der Gl. (I) und (II) mit Hilfe der im vorstehenden hergeleiteten transformierten Reihen möge noch ergänzend bemerkt werden, daß man dabei mit großem Nutzen von dem im Text schon mehrfach erwähnten Tafelwerk von H. T. Davis Gebrauch machen kann. In seinem zweiten Bande enthält es u. a. auch Tafeln von den Bernoullischen und Eulerschen Polynomen $B_n(x)$ und $E_n(x)$ bis zur Ordnung $n=8$ für alle x des Intervalls $0\ldots1$, und zwar in Schritten von 0,01 mit einer Genauigkeit von 10 Dezimalstellen. Außerdem finden sich in dem gleichen Bande auch

Tafeln von den Funktionen $\Psi^{(n)}(x)$, die z. B. in den Gl. (2.13) und (2.14) vorkommen. Sie sind in dem genannten Tafelwerk bis zur Ordnung $n=4$ enthalten, und zwar für denselben Bereich und für einen teilweise noch feineren Tafelschritt. Schließlich erwähnen wir noch die von Gram berechneten und von E. Nörlund herausgegebenen Tafeln der Riemannschen ζ-Funktion [10], die im Falle eines verschwindenden a benötigt werden und vor allem bei nicht ganzzahligen Werten von k von Vorteil sind.

Schrifttumverzeichnis.

[1] H. Burkhardt: Trigonometrische Reihen und Integrale, Mathematische Enzyklopädie, Band II, Analysis, Teil 1, 1. Hälfte.
[2] O. Lerch: Note sur la Fonction $K(w,x,s)=\sum_k \exp(2k\pi i x)/(w+k)^s$. Acta mathematica, Bd. 11 (1887/88), S. 19 bis 24.
[3] H. Mellin: Die Dirichletschen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Soc. Scientiarum Fennicae, Bd. 31 (1902).
[4] G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 398.
[5] H. Mellin: Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen ζ-Funktion, Acta Soc. Scientiarum Fennicae, Bd. 24 (1898).
[6] H. Mellin: Abriß einer einheitlichen Theorie der Γ- und der hypergeometrischen Funktion, Math. Ann. Bd. 68 (1910), S. 305 bis 337.
[7] P. Böhmer: Über die Bernoullischen Funktionen, Math. Ann. Bd. 68 (1910), S. 338 bis 360.
[8] P. Böhmer: Differenzengleichungen und bestimmte Integrale, Leipzig 1939.
[9] H. T. Davis: Tables of the higher mathematical Functions, Bloomington (1935), Bd. I und II.
[10] E. Nörlund: Tafeln der Riemannschen ζ-Funktion, D. Kgl. Videnskav. Selsk. Skrifter. Kopenhagen, Bd. 10 (1925).
397

Verfahren zur Beurteilung einer sehr geringen Korrelation zwischen zwei statistischen Merkmalsreihen.

Von *Hans Gebelein* in Eßlingen.

Während die bekannten Korrelationsmaße in mehr oder weniger befriedigender Weise dazu dienen können, einen verhältnismäßig engen Zusammenhang zwischen zwei statistischen Merkmalsreihen zu beschreiben, versagen sie, wenn es sich darum handelt, den Grad der gegenseitigen Abhängigkeit zweier noch eben nicht ganz unabhängiger statistischer Merkmalsreihen zu beurteilen, wie dies namentlich bei der Behandlung biologischer und medizinischer Fragen erforderlich ist. Hier Klarheit zu schaffen und brauchbare Untersuchungsverfahren zu gewinnen ist ein Problem, das eng mit der Lexisschen Dispersionstheorie zusammenhängt. Im folgenden wird jene Theorie so erweitert, daß es gelingt, innerhalb zweidimensionaler statistischer Gesamtheiten mit vielfach gegliederten Merkmalen geringfügige Korrelationen nachzuweisen. Insbesondere zeigt sich, daß ein bestimmtes Vielfaches des Pearsonschen Kontingenzmaßes der dem Problem am besten angemessene Parameter ist, indem diese Größe einerseits in den beiden einfachsten Sonderfällen sich auf die Lexissche Zahl L bzw. auf das Pearsonsche χ^2 reduziert, während anderseits für sie ein universelles, durch Tafelwerke der Rechnung zugängliches Verteilungsgesetz von der Art einer vieldimensionalen Gaußschen Normalverteilung gilt.

1. Problemstellung.

Zur Erläuterung des Fragenkreises, der hier behandelt werden soll, betrachten wir zunächst ein Beispiel aus der immunbiologischen Praxis [1]). Bei einer Untersuchung in den Städten Breslau und Gottesberg, Kreis Waldenburg, verteilten sich die Kleinkinder von 1 bis 5 Jahren in dem auf die Impfung gegen Diphtherie unmittelbar folgenden Jahr nach den Merkmalen „an Diphtherie erkrankt bzw. nicht erkrankt" und „geimpft bzw. nicht geimpft" entsprechend den Angaben der Tabellen 1a und 1b. Der fragliche Impferfolg muß in einer erwünschten Beeinflussung der Verteilung für die Erkrankungen durch die Impfung bestehen; daher dürfen die beiden genannten Merkmalsreihen nicht stochastisch unabhängig voneinander

[1]) Aus H. v. Schelling: Über die exakte Behandlung des Zusammenhanges zwischen biologischen Merkmalsreihen. Arbeit a. d. Staatl. Inst. f. exper. Therapie, Heft 39 (1940), S. 35 bis 71.

sein. Wie hoch ist aber diese Abhängigkeit, die auch nicht angenähert eine vollständige ist, in jedem der beiden Fälle einzuschätzen, und wie lassen sich weiter die beiden Impferfolge miteinander vergleichen?

Beispiel 1: Erkrankung von Kleinkindern an Diphtherie im ersten Jahre nach der Impfung, beobachtet in Breslau und Gottesberg.

	nicht erkrankt	erkrankt
geimpft	32 264	113
nicht geimpft . . .	14 813	166

Tabelle Ia. In Breslau beobachtet.

	nicht erkrankt	erkrankt
geimpft	1168	22
nicht geimpft . . .	44	5

Tabelle Ib. In Gottesberg beobachtet.

Es liegt nahe, zur Beantwortung dieser Fragen den üblichen Korrelationskoeffizienten r heranzuziehen, der im vorliegenden einfachsten Fall einer 2×2-Tafel bekanntlich auch mit den beiden Pearsonschen Korrelationsverhältnissen und dem Kontingenzmaß (Mean square Contingency) nach Pearson übereinstimmt. Die Rechnung liefert $r = 0{,}0461$ für die Breslauer und $r = 0{,}1115$ für die Gottesberger Beobachtungsreihe. Beide Werte sind überraschend niedrig, womit zwar nur die Tatsache zum Ausdruck kommt, daß auch ohne Impfung die meisten Kinder nicht erkranken, was aber zur Folge hat, daß diese Größen sich als Beweisstücke für den Impferfolg nicht gut eignen. Bedenklicher jedoch ist, daß der Vergleich beider Beobachtungsreihen mittels des Korrelationskoeffizienten mißlingt, denn wie sich später herausstellen wird, liefert trotz des kleineren r die Breslauer Beobachtungsreihe infolge ihres größeren Umfangs gegenüber der Gottesberger Beobachtung den stärkeren Beweis für den Erfolg des Impfverfahrens.

Erforderlich ist für die statistische Bearbeitung derartiger Fragen ein Urteil darüber, ob die Besetzung der Felder einer Korrelationstabelle, die im allgemeinen Fall k Spalten und l Zeilen aufweisen möge, den Zufallsgesetzen entspricht, oder ob sich in ihr Besonderheiten zeigen, die sich durch Zufall nicht begründen lassen. Als Grundlage für die folgenden Untersuchungen wird zunächst mittels der Kombinatorik die Aufteilungswahrscheinlichkeit für Matrizen vorgeschriebener Zeilen- und Spaltensummen errechnet. Diese Verteilungsfunktion ermöglicht es dann, Kriterien für die Beurteilung auch sehr geringer Korrelationszusammenhänge zu entwickeln. Außerdem treten von dem so gewonnenen Standpunkt aus bemerkenswerte Zusammenhänge mit einer Reihe bekannter Verfahren der mathematischen Statistik zutage.

2. Kombinatorische Aufteilungswahrscheinlichkeit für Matrizen.

Zur Vorbereitung auf das zu lösende kombinatorisch-statistische Problem für Matrizen betrachten wir zunächst folgende einfachere Aufgabe [2]):

Es liege eine Menge von m Elementen vor, unter denen k Klassen mit den Besetzungszahlen $m_1, m_2, \ldots m_k$ zu unterscheiden sind, derart, daß

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m \quad \text{ist} \quad (m_i > 0,\ k < m).$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei der Entnahme von Teilmengen, bestehend aus n Elementen, eine solche mit den bestimmten Besetzungszahlen $n_1, n_2, \ldots n_k$ (mit $0 \leq n_i \leq m_i$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) erhalten?

Die Lösung geschieht am einfachsten durch folgende Überlegung: Aus der gegebenen m-Menge sind im ganzen n Elemente herauszuheben, was auf $\binom{m}{n}$ Weisen geschehen kann. Wir betrachten nun eine bestimmte dieser Teilmengen, z. B. diejenige mit den Besetzungszahlen $n_1 \ldots n_k$, und fragen, auf wie viele Weisen sie erhalten werden kann; denn je häufiger sie zustande kommt, um so mehr ist mit ihrem Auftreten zu rechnen. Zu ihrem Zustandekommen erforderlich ist erstens die Entnahme von n_1 Elementen der ersten Klasse in der m-Menge, was auf $\binom{m_1}{n_1}$ Weisen geschehen kann, ebenso die Entnahme von n_2 Elementen der zweiten Klasse, wofür es $\binom{m_2}{n_2}$ Möglichkeiten gibt usw., bis zur Entnahme von n_k Elementen der k-ten Klasse, was auf $\binom{m_k}{n_k}$ Arten möglich ist. Daher sind unter den $\binom{m}{n}$ Teilmengen mit n Elementen genau

$$\binom{m_1}{n_1} \cdot \binom{m_2}{n_2} \cdots \binom{m_k}{n_k}$$

[2]) Vgl. H. Gebelein: Zahl und Wirklichkeit — Grundzüge einer mathematischen Statistik. Leipzig 1943, S. 250 ff.

solche mit der angenommenen Klassenaufteilung enthalten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Quotient dieser beiden Anzahlen und wir erhalten daher das Ergebnis

$$W(n_1 \dots n_k) = \frac{\binom{m_1}{n_1}\binom{m_2}{n_2}\cdots\binom{m_k}{n_k}}{\binom{m}{n}} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$(m_1 + \dots + m_k = m, \quad n_1 + \dots + n_k = n, \quad 0 \leq n_i \leq m_i \text{ für } i = 1, 2, \dots k).$$

Es ist dies eine arithmetische Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $(k-1)$ voneinander unabhängigen, ganzzahligen Veränderlichen. Man überzeugt sich leicht, daß die Summe der $W(n_1 \dots n_k)$, erstreckt über alle positiv ganzzahligen Wertesysteme n_i, welche die Bedingung $n_1 + \dots + n_k = n$ erfüllen, wie es sein muß, den Wert Eins ergibt. Bemerkenswert ist, daß man für die Probefunktionen

$$n_i, \quad n_i(n_i - 1), \quad n_i(n_i - 1)(n_i - 2) \quad \text{usw.}$$

die Erwartungswerte auf Grund der Verteilung (1) sofort angeben kann. Daher kann man auch ohne Schwierigkeit für die relativen Einzelhäufigkeiten $\frac{n_i}{n}$ innerhalb der Teilmengen Erwartungswert und Streuung berechnen. Diese wichtigen Ergebnisse lauten

$$E\left(\frac{n_i}{n}\right) = \frac{m_i}{m}, \quad Str\left(\frac{n_i}{n}\right) = \frac{m-n}{n(m-1)} \cdot \frac{m_i}{m}\left(1 - \frac{m_i}{m}\right) \quad \dots \dots \quad (2).$$

Wir wenden uns nunmehr der Frage nach der Aufteilungswahrscheinlichkeit für Matrizen zu. Diese Aufgabe lautet:

Gegeben sei eine Menge von m Elementen, darunter m_1 solchen der ersten, m_2 solchen der zweiten usw., endlich m_k solchen der k-ten Art. Diese Gesamtmenge sei die Zusammenfassung von l Teilmengen mit je n_j Elementen, in welchen die k Klassen mit bestimmten Besetzungszahlen $n_{1j}, n_{2j}, \dots n_{ij} \dots n_{kj}$ vertreten sind. Die n_{ij} bilden eine Korrelationstabelle in Form einer Matrix mit k Spalten und l Zeilen. Die Werte der Spaltensummen sind die k Klassenumfänge m_i in der Gesamtmenge; die Werte der Zeilensummen die Umfänge der l Teilmengen, aus denen sich die Gesamtmenge zusammensetzt. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Matrix (n_{ij}), wenn die Systeme der Anzahlen $m_1 \dots m_k$ und $n_1 \dots n_j$ vorgeschrieben sind.

Korrelationstabelle.

j	k Klassen i	$\sum_{i=1}^{k} n_{ij}$
l Teilmengen j	$n_{11}\ n_{21} \dots n_{k1}$	n_1
	$n_{12}\ n_{22} \dots n_{k2}$	n_2
	$\dots\dots\dots\dots$	
	$n_{1l}\ n_{2l} \dots n_{kl}$	n_l
$\sum_{j=1}^{l} n_{ij}$	$m_1\ m_2 \dots m_k$	m

Nach den getroffenen Annahmen ist für alle i und j

$$\sum_{i=1}^{k} n_{ij} = n_j, \quad \sum_{j=1}^{l} n_{ij} = m_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{l} n_j = m \quad \dots \dots \quad (3).$$

Die Frage nach der Aufteilungswahrscheinlichkeit $W(n_{ij})$ wird nun gelöst durch wiederholte Anwendung des obigen Ergebnisses (1). Indem aus der Gesamtmenge mit m Elementen und den Besetzungszahlen $m_1 \dots m_k$ zunächst eine Teilmenge mit n_1 Elementen herausgehoben wird, gilt für die Besetzung der ersten Zeile die Verteilung

$$\frac{\binom{m_1}{n_{11}}\binom{m_2}{n_{21}}\cdots\binom{m_k}{n_{k1}}}{\binom{m}{n_1}}.$$

Für die Entnahme der zweiten Zeile mit n_2 Elementen steht nun noch eine Menge mit $(m-n_1)$ Elementen und den Besetzungszahlen $(m_1-n_{11}), \ldots (m_k-n_{k1})$ zur Verfügung. Daher lautet für sie die Verteilung

$$\frac{\binom{m_1-n_{11}}{n_{12}}\binom{m_2-n_{21}}{n_{22}}\cdots\binom{m_k-n_{k1}}{n_{k2}}}{\binom{m-n_1}{n_2}}.$$

Auf diese Weise wird fortgefahren bis zur $(l-1)$-ten Zeile. Für deren Gewinnung enthält die Restmenge nur noch $(n_{l-1}+n_l)$ Elemente und zwar je $(n_{1,l-1}+n_{1l}), \ldots (n_{k,l-1}+n_{kl})$ solche der einzelnen Klassen. Daher ist die Verteilungsfunktion für die vorletzte Zeile

$$\frac{\binom{n_{1,l-1}+n_{1l}}{n_{1,l-1}}\binom{n_{2,l-1}+n_{2l}}{n_{2,l-1}}\cdots\binom{n_{k,l-1}+n_{kl}}{n_{k,l-1}}}{\binom{n_{l-1}+n_l}{n_{l-1}}}.$$

Die letzte Zeile endlich ergibt sich zwangsläufig, denn ihre formale Verteilungsfunktion nimmt den Wert Eins an. Sie lautet nämlich

$$\frac{\binom{n_{1l}}{n_{1l}}\binom{n_{2l}}{n_{2l}}\cdots\binom{n_{kl}}{n_{kl}}}{\binom{n_l}{n_l}}=1.$$

Die Verteilungsfunktion für die Matrix ist nun das Produkt aller dieser Verteilungsfunktionen für die einzelnen Zeilen. Beachtet man, daß die an gleicher Stelle stehenden Faktoren sich zusammenfassen lassen, indem z. B.

$$\binom{m}{n_1}\binom{m-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_{l-1}+n_l}{n_{l-1}}$$
$$=\frac{m!}{n_1!\,(m-n_1)!}\,\frac{(m-n_1)!}{n_2(m-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n_{l-1}+n_l)!}{n_{l-1}!\,n_l!}=\frac{m!}{n_1!\,n_2!\ldots n_l!}$$

ist, so lautet das Ergebnis

$$W(n_{ij})=\frac{\dfrac{m_1!}{n_{11}!\ldots n_{1l}!}\,\dfrac{m_2!}{n_{21}!\ldots n_{2l}!}\cdots\dfrac{m_k!}{n_{k1}!\ldots n_{kl}!}}{\dfrac{m!}{n_1!\ldots n_l!}}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} m_i!\,\prod\limits_{j=1}^{l} n_j!}{m!\,\prod\limits_{i,j}^{k,l} n_{ij}!} \quad \ldots \quad (4).$$

Die letztere Schreibweise läßt erkennen, daß eine Vertauschung der Spalten und Zeilen diese Aufteilungsfunktion unverändert läßt.

Für die folgenden Rechnungen sollen nun zunächst einige Erwartungswerte bereitgestellt werden, nämlich diejenigen der Prüffunktionen

$$n_{ij}, \quad n_{ij}(n_{ij}-1), \quad n_{ij}n_{ij'} \text{ und } n_{ij}n_{i'j'}.$$

Das Verfahren ist in all diesen Fällen das gleiche. So folgt z. B. aus der Identität

$$n_{ij}\,W(n_{ij})=\frac{\dfrac{m_1!}{n_{11}!\ldots n_{1l}!}\cdots\dfrac{(m_i-1)!\cdot m_i}{n_{i1}!\ldots(n_{ij}-1)!\ldots n_{il}!}\cdots\dfrac{m_k!}{n_{k1}!\ldots n_{kl}!}}{\dfrac{(m-1)!\cdot m}{n_1!\ldots(n_j-1)!\cdot n_j\ldots n_l!}}$$

wegen der Tatsache, daß rechts bis auf den konstanten Faktor $\frac{m_i n_j}{m}$ wieder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nach (4) steht, die über alle Wertesysteme der n_{ij} summiert Eins ergibt, der Erwartungswert

$$E(n_{ij})=\frac{m_i n_j}{m},$$

und ganz entsprechend lassen sich auch die Erwartungswerte der übrigen oben aufgeführten Größen gewinnen. Die Ergebnisse lauten:

$$\left.\begin{aligned} E(n_{ij})&=\frac{m_i n_j}{m}, \quad E(n_{ij}(n_{ij}-1))=\frac{m_i(m_i-1)\,n_j(n_j-1)}{m(m-1)},\\ E(n_{ij}n_{ij'})&=\frac{m_i(m_i-1)}{m(m-1)}\,n_j n_{j'}, \quad E(n_{ij}n_{i'j'})=\frac{m_i m_{i'}\,n_j n_{j'}}{m(m-1)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Es ist nicht schwierig, mittels dieser Formeln Erwartungswert und Streuung für die Anzahlen n_{ij} oder auch für die relativen Einzelhäufigkeiten $\frac{n_{ij}}{n_j}$ innerhalb der betreffenden Zeile auszurechnen. Es ist entsprechend den Gl. (2)

$$E\left(\frac{n_{ij}}{n_j}\right)=\frac{m_i}{m}, \quad Str\left(\frac{n_{ij}}{n_j}\right)=\frac{m-n_j}{n_j(m-1)}\frac{m_i}{m}\left(1-\frac{m_i}{m}\right) \quad \text{(6)},$$

oder mit Verwendung der im folgenden häufig gebrauchten Abkürzungen

$$\frac{m_i}{m}=p_i, \quad \frac{n_j}{m}=q_j \quad \text{(7)},$$

$$E(n_{ij})=m\,p_i q_j, \quad Str(n_{ij})=\frac{m^2}{m-1}p_i(1-p_i)q_j(1-q_j) \quad \text{(6a)}.$$

3. Die E. Webersche Differenzenprobe.

Greifen wir zurück auf den Befund der Breslauer Kleinkinder von Beispiel 1. Ohne Zweifel kommt der Impferfolg dadurch zum Ausdruck, daß nur $\frac{113}{32377}=0{,}349\,\%$ der geimpften Kinder erkrankten, während diese Häufigkeit bei den ungeimpften Kindern $\frac{166}{14979}=1{,}108\,\%$ betrug. Die Differenz 0,759 % beider Häufigkeiten drückt die Verbesserung aus; um ihre Bedeutung einzuschätzen, ist es aber erforderlich, Erwartungswert und Streuung dieser Größe zu kennen. Der Vergleich der Abweichung dieser Größe von ihrem Erwartungswert und ihrer mittleren quadratischen Abweichung, das ist die Quadratwurzel aus der Streuung, liefert die sehr brauchbare Differenzenprobe.

Wir betrachten den fraglichen Ausschnitt aus der Korrelationstabelle. Die Prüfung erstreckt sich nur auf zwei Elemente der Matrix, überdies aus der gleichen Spalte. Die Prüffunktion lautet:

. . . .	. . .
. . . n_{ij} . . .	n_j
. . . .	. . .
. . . $n_{ij'}$ . . .	$n_{j'}$
. . . .	. . .
. . . m_i . . .	m

$$d=\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}-\frac{n_{ij}}{n_j}.$$

Nach Gl. (6) ist ihr Erwartungswert

$$E(d)=E\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}\right)-E\left(\frac{n_{ij}}{n_j}\right)=\frac{m_i}{m}-\frac{m_i}{m}=0;$$

daher kommt es nur auf die Streuung an. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
Str(d)&=E\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}-\frac{m_i}{m}-\left(\frac{n_{ij}}{n_j}-\frac{m_i}{m}\right)\right)^2\\
&=E\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}-\frac{m_i}{m}\right)^2+E\left(\frac{n_{ij}}{n_j}-\frac{m_i}{m}\right)^2-2E\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}-\frac{m_i}{m}\right)\left(\frac{n_{ij}}{n_j}-\frac{m_i}{m}\right)\\
&=Str\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}\right)+Str\left(\frac{n_{ij}}{n_j}\right)-2E\left(\frac{n_{ij'}n_{ij}}{n_{j'}n_j}\right)+2\frac{m_i}{m}E\left(\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}+\frac{n_{ij}}{n_j}\right)-2\left(\frac{m_i}{m}\right)^2,
\end{aligned}$$

wegen Gl. (5) und (6)

$$\begin{aligned}
&=\frac{m_i}{m}\left(1-\frac{m_i}{m}\right)\left(\frac{m-n_{j'}}{n_{j'}(m-1)}+\frac{m-n_j}{n_j(m-1)}\right)-2\frac{m_i(m_i-1)}{m(m-1)}+2\left(\frac{m_i}{m}\right)^2\\
&=\frac{m_i(m-m_i)}{m^2(m-1)}\left(\frac{m}{n_{j'}}+\frac{m}{n_j}-2\right)+2\frac{m_i(m-m_i)}{m^2(m-1)}\\
&=\frac{m_i(m-m_i)}{m(m-1)}\left(\frac{1}{n_{j'}}+\frac{1}{n_j}\right).
\end{aligned}$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$d=\frac{n_{ij'}}{n_{j'}}-\frac{n_{ij}}{n_j}, \quad E(d)=0, \quad Str(d)=\frac{m_i(m-m_i)}{m(m-1)}\left(\frac{1}{n_{j'}}+\frac{1}{n_j}\right) \quad \text{(8)}.$$

Dieser Ausdruck für die Streuung von d ist bis auf den für die praktische Rechnung belanglosen Faktor $\frac{m}{m-1}$ identisch mit einer Formel, die von Erna Weber für die Differenzenprobe im Falle einer 2×2-Tafel empfohlen worden ist[3]), und die in biologischen

[3]) Erna Weber: Einführung in die Variations- und Erblichkeitsstatistik. München 1935, S. 180f.

Kreisen viel Beachtung gefunden hat. H. v. Schelling macht in der obengenannten Schrift[4]) darauf aufmerksam, daß die Anwendung der bekannten Bernoullischen Formel zur Berechnung der Streuungen von Minuend und Subtrahend und nachfolgende Addition hier nicht zum richtigen Ergebnis führt; er setzt sich für die von E. Weber selbst nicht befriedigend begründete Formel ein und liefert für sie einen Beweis, dessen Grundgedanke unten im Anschluß an Gl. (9) zur Sprache kommen wird.

Nun kann die in Beispiel 1a auftretende Differenz von 0,759% beurteilt werden. Mit $m=47356$, $m_i=279$, $n_j=32377$, $n_{ij}=113$, $n_{j'}=14979$ und $n_{ij'}=166$ wird

$$Str(d)=\frac{279\cdot 47077}{47356\cdot 47355}\left(\frac{1}{14979}+\frac{1}{32377}\right)=57{,}19\cdot 10^{-8}.$$

Daher ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sqrt{Str(d)}=7{,}563\cdot 10^{-4}=0{,}07563\,\%$$

und für die hierauf bezogene Differenz ergibt sich

$$\frac{d}{\sqrt{Str(d)}}=\frac{0{,}7592}{0{,}07563}=\underline{\underline{10{,}04}}.$$

Es kann als ganz ausgeschlossen gelten, daß dieser Wert zufällig zustande gekommen sein könnte, denn bekanntlich stellen die Werte ± 3 bereits ungefähr die Grenze der praktisch in Betracht zu ziehenden Fälle dar. Die vorliegende Beobachtungsreihe gibt demnach einen starken Hinweis auf den Impferfolg.

Die Anwendbarkeit der durch Gl. (8) gegebenen Differenzenprobe ist jedoch keineswegs auf den einfachen Fall einer 2×2-Tafel beschränkt, sondern dieses Verfahren kann bei irgendwelchen Korrelationstabellen zur Kontrolle zweier etwa bei der Durchsicht auffallender Besetzungszahlen aus der gleichen Spalte dienen.

Beispiel 2: Differenzen der Augenzahlen bei fünf Wurfserien mit zwei Würfeln. Es wurde mit zwei Spielwürfeln gewürfelt und bei jedem Wurf die Differenz der Augenzahlen aufgeschrieben. Fünf Wurfserien, die von verschiedenen Personen ausgeführt wurden, lieferten die in Zahlentafel 2 zusammengestellten Ergebnisse.

Zahlentafel 2.

Serie \ Diff.	0	1	2	3	4	5	Σ
I	11	17	21	13	6	2	70
II	10	15	13	9	6	2	55
III	7	16	9	11	8	4	55
IV	11	23	24	22	10	2	92
V	18	12	14	16	9	1	70
Σ	57	83	81	71	39	11	342

Es handelt sich hier nicht darum, ob etwa die Würfel „richtige“ sind, sondern die anzustellenden Proben laufen darauf hinaus, eine etwaige systematische Abhängigkeit der Wurfergebnisse von den ausführenden Spielern festzustellen, die allerdings nicht zu vermuten ist.

Besonders stark aus der Reihe fallen z. B. der zweite und der vierte Wert der ersten Spalte. Für diese liefert die Differenzenprobe mit $n_{ij'}=10$, $n_{ij}=11$, $n_{j'}=55$, $n_j=92$, $m_i=57$ und $m=342$ nach den Gl. (8)

$$d=\frac{10}{55}-\frac{11}{92}=0{,}06225,\qquad Str(d)=\frac{57\cdot 285}{342\cdot 341}\cdot\left(\frac{1}{55}+\frac{1}{92}\right)=0{,}004047,$$

$$\sqrt{Str(d)}=0{,}06361\quad\text{und damit}\quad\frac{d}{\sqrt{Str(d)}}=\frac{0{,}06225}{0{,}06361}=\underline{\underline{0{,}9786}}.$$

Im Unterschied zum vorangehenden Beispiel ist hier die Größe der Differenz demnach durchaus nicht ungewöhnlich; die Werte der beiden Beobachtungen lassen sich zwanglos als zufällig erklären.

[4]) H. v. Schelling: a. a. O. S. 44f.

4. Die Schellingsche Trefferprobe.

Während die Differenzenprobe für die Beurteilung einzelner Felder einer Korrelationstabelle wertvoll ist, besteht auch ein Bedürfnis nach Prüfverfahren, welche auf einmal ein Urteil über die ganze Aufnahme zu gewinnen gestatten. Ein bemerkenswertes Verfahren zu diesem Zwecke wurde im Jahre 1935 von H. v. Schelling angegeben[5]).

H. v. Schelling beschränkt sich dabei auf quadratische Korrelationstabellen, also auf den für die Korrelationstheorie besonders wichtigen Fall $l=k$. Er geht davon aus, daß im Grenzfall vollständiger Abhängigkeit der beiden Merkmale nach entsprechender Anordnung der Merkmalsreihen nur die Hauptdiagonale von Null verschiedene Besetzungszahlen aufweist; und er wählt daher als Prüffunktion die Spur der quadratischen Matrix

$$s = n_{11} + n_{22} + \cdots + n_{kk} = \sum_{i=1}^{k} n_{ii}.$$

Für deren Erwartungswert folgt nach (6a) $E(s) = m \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i q_i$, für die Streuung aber wird

$$\begin{aligned} Str(s) &= E\left\{\sum_{i=1}^{k} (n_{ii} - m\,p_i\,q_i)\right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} E(n_{ii} - m\,p_i\,q_i)^2 + \sum_{i' \neq i} E(n_{ii} - m\,p_i\,q_i)(n_{i'i'} - m\,p_{i'}\,q_{i'}). \end{aligned}$$

Nun ist, ebenfalls nach (6a),

$$\begin{aligned} E(n_{ii} - m\,p_i\,q_i)^2 = Str(n_{ii}) &= \frac{m^2}{m-1} p_i(1-p_i)\,q_i(1-q_i) \\ &= \frac{m^2}{m-1} p_i^2 q_i^2 + \frac{m^2}{m-1} p_i q_i (1-p_i-q_i) \end{aligned}$$

und nach (5)

$$\begin{aligned} & E(n_{ii} - m\,p_i\,q_i)(n_{i'i'} - m\,p_{i'}\,q_{i'}) \\ &= E(n_{ii}\,n_{i'i'}) - m\,p_i\,q_i \cdot E(n_{i'i'}) - m\,p_{i'}\,q_{i'} \cdot E(n_{ii}) + m^2 p_i\,q_i\,p_{i'}\,q_{i'} \\ &= \frac{1}{m(m-1)} m_i\,n_i\,m_{i'}\,n_{i'} - m^2 p_i\,q_i\,p_{i'}\,q_{i'} \\ &= p_i\,q_i\,p_{i'}\,q_{i'}\left(\frac{m^3}{m-1} - m^2\right) = \frac{m^2}{m-1} p_i\,p_{i'}\,q_i\,q_{i'}. \end{aligned}$$

Damit wird endlich

$$\begin{aligned} Str(s) &= \frac{m^2}{m-1} \sum_{i=1}^{k} p_i^2 q_i^2 + \frac{m^2}{m-1} \sum_{i=1}^{k} p_i q_i (1-p_i-q_i) + \frac{m^2}{m-1} \sum_{i' \neq i} p_i\,p_{i'}\,q_i\,q_{i'} \\ &= \frac{m^2}{m-1} \left\{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i q_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} p_i q_i (1-p_i-q_i)\right\}. \end{aligned}$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

$$\left.\begin{aligned} s = \sum_{i=1}^{k} n_{ii}, \qquad E(s) = m \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i q_i, \\ Str(s) = \frac{m^2}{m-1} \left\{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i q_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} p_i q_i (1-p_i-q_i)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

Die Schellingsche Kennziffer für die Treffsicherheit von Prognosen, von ihm als T (Treffer) bezeichnet, ist

$$T = \frac{s - E(s)}{\sqrt{Str(s)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9a);$$

Werte für T bis etwa 3 können als zufallsbedingt gelten, größere Werte geben einen Hinweis auf systematische Zusammenhänge und zwar um so mehr, je größer T ausfällt.

[5]) H. v. Schelling: Die Beurteilung der Treffsicherheit von Prognosen. Dtsch. Statist. Zentralblatt Bd. 27 (1935), S. 141 bis 148.

Beispiel 3: Impfreaktion und Schlußtiter. Bei einer Versuchsreihe von C. Paschlau ergab sich folgender Zusammenhang zwischen der Impfreaktion und dem durch die Impfung erreichten Schlußtiter (bei Impfung mit Di-Toxoid Asid)[6]).

Zahlentafel 3.

Impf-reaktion	Schlußtiter $< 0{,}005$	bis 0,03	bis 1,0	$> 1{,}0$ A.E.	n_j
0	8	2	0	0	10
+	14	4	13	13	44
++	2	2	7	11	22
+++	0	0	0	12	12
m_i	24	8	20	36	88

Die für die Berechnung von T erforderlichen Größen sind in Zahlentafel 4 zusammengestellt.

Zahlentafel 4.

i	p_i	q_i	$p_i q_i$	$1-p_i-q_i$	$p_i q_i(1-p_i-q_i)$
1	0,27273	0,11364	0,03099	0,61363	0,01902
2	0,09091	0,50000	0,04546	0,40909	0,01859
3	0,22727	0,25000	0,05682	0,52273	0,02970
4	0,40909	0,13636	0,05578	0,45455	0,02536
			$\Sigma = 0{,}18905$		$\Sigma = 0{,}09267$

Es ist
$$s = 31, \qquad E(s) = 88 \cdot 0{,}18905 = 16{,}64,$$
$$Str(s) = \frac{88^2}{87} \cdot (0{,}18905^2 + 0{,}09267) = 11{,}43, \qquad \sqrt{Str(s)} = 3{,}381$$
und hiermit ergibt sich
$$T = \frac{31 - 16{,}64}{3{,}381} = \underline{4{,}249}.$$

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß im Falle $k = 2$ die Maßzahl T sich als identisch erweist mit dem Ausdruck $\frac{d}{\sqrt{Str(d)}}$ der Differenzenprobe, dessen Bestandteile nach (8) dann mittels der Beziehungen (3) sich ebenfalls noch vereinfachen lassen. Auf dieser merkwürdigen Tatsache beruht der Beweis, den v. Schelling neben der unmittelbaren Ausrechnung für die E. Webersche Formel gibt[7]). Der tiefere Grund für diese Übereinstimmung ist der, daß es sich im Falle einer 2×2-Tafel um ein Problem mit nur einem Freiheitsgrad handelt, da wegen (3) bei Vorgabe nur einer Feldgröße, z. B. n_{11} die übrigen Besetzungszahlen sich zwangsläufig ergeben. Daher ist beidemal wegen der Linearität der Prüffunktionen der Summand mit n_1 deren allein wesentlicher Bestandteil, und man erhält, wie eine einfache Rechnung zeigt, in der Tat die fragliche Formel
$$T = \sqrt{m-1} \cdot \frac{n_{11} n_{22} - n_{12} n_{21}}{\sqrt{n_1 n_2 m_1 m_2}} \quad \text{(9b)}$$
auch für $\frac{n_{11} - E(n_{11})}{\sqrt{Str(n_{11})}}$.

Der Faktor von $\sqrt{m-1}$ in der Formel für T ist übrigens genau der Korrelationskoeffizient r. Es ist daher nun möglich, auch die zu Anfang für Beispiel 1a und 1b errechneten Werte $r = 0{,}0461$ bzw. $r = 0{,}1115$ richtig einzuschätzen. Dem Wert $T = 1$ entspräche ein Korrelationskoeffizient der Größe $\frac{1}{\sqrt{m-1}}$, also gleich 0,00460 im ersteren und 0,0284 im zweiten Fall. So gering die Korrelation auch ist, sie ist doch im ersten Fall rund 10-mal und im

[6]) Aus H. v. Schelling: Über die exakte Behandlung . . . S. 36.
[7]) a. a. O. S. 45f.

zweiten Fall rund 4-mal größer als jene Werte und damit beidemal so hoch, daß kaum zu befürchten ist, sie könnte durch Zufallsergebnisse vorgetäuscht sein.

5. Das universelle Verteilungsgesetz.

Bevor wir fortfahren, weitere Prüfverfahren zu betrachten, greifen wir zunächst nochmals auf die Verteilungsfunktion $W(n_{ij})$ nach Gl. (4) zurück, um für sie eine für große m asymptotisch geltende Formel zu gewinnen. (Die folgende Umformung entspricht in der Darstellung und den Bezeichnungen der lehrbuchmäßigen Wiedergabe des Laplaceschen Grenzübergangs in meinem Buche „Zahl und Wirklichkeit".)

Der entscheidende Kunstgriff bei der Behandluug der Gl. (4) ist die Einführung neuer Veränderlicher an Stelle der Größen n_{ij}. Beachtet man, daß nennenswerte Wahrscheinlichkeiten nur für solche Werte der n_{ij} bestehen, die innerhalb einer gewissen Umgebung von deren Erwartungswerten $m\,p_i\,q_j$ liegen, so ist es naheliegend, als neue Parameter z_{ij} die Unterschiede zwischen n_{ij} und $m\,p_i\,q_j$ einzuführen. Durch die Substitutionen

$$n_{ij} = m\,p_i\,q_j + z_{ij} \quad \text{oder} \quad z_{ij} = n_{ij} - m\,p_i\,q_j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wird mit $m_i = m\,p_i$ und $n_j = m\,q_j$

$$W(n_{ij}) = \frac{\prod_{i=1}^{k} m_i!\,\prod_{j=1}^{l} n_j!}{m!\,\prod_{i,j=1}^{k,l} n_{ij}!} = \frac{\prod_{i=1}^{k}(m\,p_i)!\,\prod_{j=1}^{l}(m\,q_j)!}{m!\,\prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j + z_{ij})!}.$$

Wegen der Gl. (3) gelten für die z_{ij} die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{k} z_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^{l} z_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} z_{ij} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Vor allem ist aber wichtig, daß die interessierenden z_{ij} klein sind im Vergleich zu den Größen $m\,p_i\,q_j$. Aus den Gl. (6a) folgt nämlich, daß die mittleren quadratischen Abweichungen wie $\sqrt{m}$ zunehmen, so daß sie und damit auch die z_{ij} für einigermaßen großes m gegenüber den Größen $m\,p_i\,q_j$ mehr und mehr zurücktreten. Dies hat zur Folge, daß bei hinreichend großem m für alle i, j

$$|z_{ij}| = |n_{ij} - m\,p_i\,q_j| \ll m\,p_i\,q_j$$

ist, so daß asymptotisch in m die Formel

$$(m\,p_i\,q_j + z_{ij})! \sim (m\,p_i\,q_j)!\,(m\,p_i\,q_j)^{z_{ij}} \cdot e^{\frac{z_{ij}^2}{2\,m\,p_i\,q_j}}$$

gilt[8]). Hiermit wird nun

$$\prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j + z_{ij})! \sim \prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j)!\,\prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j)^{z_{ij}} \cdot e^{\frac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{z_{ij}^2}{p_i\,q_j}}$$

$$= \prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j)! \cdot e^{\frac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{z_{ij}^2}{p_i\,q_j}};$$

denn wegen (11) ist

$$\prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j)^{z_{ij}} = m^{\sum_{i,j=1}^{k,l} z_{ij}} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{\sum_{j=1}^{l} z_{ij}} \cdot \prod_{j=1}^{l} q_j^{\sum_{i=1}^{k} z_{ij}} = 1.$$

Für die Verteilung $W(n_{ij})$ lautet das bisherige Ergebnis

$$W(n_{ij}) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k}(m\,p_i)!\,\prod_{j=1}^{l}(m\,q_j)!}{m!\,\prod_{i,j=1}^{k,l}(m\,p_i\,q_j)!}\,e^{-\frac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{z_{ij}^2}{p_i\,q_j}} = C \cdot e^{-\frac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{z_{ij}^2}{p_i\,q_j}}.$$

Es ist nun noch die Konstante C zu bestimmen. Für deren drei Bestandteile gelten die asymptotischen Formeln[8])

[8]) Vgl. Zahl und Wirklichkeit, S. 270 f.

$$\frac{1}{m!}\prod_{i=1}^{k}(m p_i)! \sim \sqrt{2\pi m}^{k-1}\cdot\sqrt{p_1\dots p_k}\cdot p_1^{m p_1}\dots p_k^{m p_k} = \sqrt{2\pi m}^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{k} p_i^{m p_i},$$

$$\frac{1}{m!}\prod_{j=1}^{l}(m q_j)! \sim \sqrt{2\pi m}^{l-1}\cdot\sqrt{q_1\dots q_l}\cdot q_1^{m q_1}\dots q_l^{m q_l} = \sqrt{2\pi m}^{l-1}\left(\prod_{j=1}^{l} q_j\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{l} q_j^{m q_j},$$

$$\frac{1}{m!}\prod_{i,j=1}^{k,l}(m p_i q_j)! \sim \sqrt{2\pi m}^{kl-1}\cdot\left(\prod_{i,j=1}^{k,l} p_i q_j\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i,j=1}^{k,l}(p_i q_j)^{m p_i q_i}$$

$$= \sqrt{2\pi m}^{kl-1}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)^{\frac{l}{2}}\left(\prod_{j=1}^{l} q_j\right)^{\frac{k}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{k} p_i^{m p_i}\prod_{j=1}^{l} q_j^{m q_j}.$$

Damit wird nach einigen Kürzungen

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}^{(k-1)(l-1)}\cdot\sqrt{p_1\dots p_k}^{l-1}\cdot\sqrt{q_1\dots q_l}^{k-1}}.$$

Das Endergebnis für die Verteilung $W(n_{ij})$ aber lautet:

$$W(n_{ij}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}^{(k-1)(l-1)}\sqrt{p_1\dots p_k}^{l-1}\sqrt{q_1\dots q_l}^{k-1}}\, e^{-\frac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{z_{ij}^2}{p_i q_j}} = C\cdot e^{-\frac{\Omega^2}{2}} \quad . \quad . \quad (12).$$

Dies ist eine Gaußsche Verteilung in einem Raum von $(k-1)(l-1)$ Dimensionen. Sie stellt demnach das universelle Grenzgesetz der Aufteilungswahrscheinlichkeiten für Matrizen dar. Bekanntlich stehen für die Arbeit mit dieser Verteilung, namentlich durch die Berechnungen Karl Pearsons ausgedehnte Tafelwerke zur Verfügung. Besonders bemerkenswert aber ist, daß die Abhängigkeit von allen Größen n_{ij} mittels einer einzigen Veränderlichen erfaßt wird, die somit den dem Problem am besten angemessenen Parameter darstellt. Dieser Parameter lautet ausgeschrieben, sowie mit Verwendung der Abkürzung $h_{ij} = \frac{n_{ij}}{m}$

$$\Omega^2 = \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{(n_{ij}-m p_i q_j)^2}{p_i q_j} = m\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{(h_{ij}-p_i q_j)^2}{p_i q_j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Er stimmt demnach bis auf einen Normierungsfaktor mit dem Pearsonschen Kontingenzmaß

$$f^2 = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(l-1)}}\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{(h_{ij}-p_i q_j)^2}{p_i q_j} = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(l-1)}}\left(\sum_{i,j=1}^{k,l}\frac{n_{ij}^2}{m_i n_j}-1\right) \quad \text{überein.}$$

Sonderfälle:

a) Für eine 2×2-Tafel wird $f^2 = r^2$ und daher nach (12) mit $k = l = 2$

$$W(n_{ij}) \simeq w(r^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}}\, e^{-\frac{m}{2}r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a).$$

Das in diesem einfachsten Fall einparametrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der n_{ij} geht demnach im Grenzfall $m\to\infty$ in eine gewöhnliche Gaußsche Normalverteilung für den Korrelationskoeffizienten r über. Wie man sofort abliest, ist

$$E(r) = 0 \quad \text{und} \quad Str(r) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\text{nach (9b) genauer } \frac{1}{\sqrt{m-1}}\right).$$

b) Bei der bekannten Pearsonschen Verteilung $w(\chi^2) = C\cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$ handelt es sich um den Schluß von einer sehr großen, nach k Merkmalen gegliederten Ausgangsmenge des Umfangs m auf eine ebensolche, unbegrenzt viel weniger mächtige, aber immer noch sehr große Teilmenge vom Umfang $n = q\cdot m$. Es liegen also nur $l = 2$ Teilmengen vor mit den relativen Umfängen $q_1 = q$ und $q_2 = 1 - q \simeq 1$. Daher vereinfacht sich die Konstante des Verteilungsgesetzes (12) zu

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}^{k-1}\sqrt{p_1\dots p_k}\cdot\sqrt{q\cdot 1}^{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}^{k-1}\sqrt{p_1\dots p_k}},$$

das Argument aber wird mit $n_{i1} = n_i$, $n_{i2} = m_i - n_i$, $m q_1 = n$ und $m q_2 = m - n$

$$\Omega^2 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_{i1} - m\,p_i\,q_1)^2}{p_i\,q_1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_{i2} - m\,p_i\,q_2)^2}{p_i\,q_2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - n_i - (m-n)\,p_i)^2}{(m-n)\,p_i}$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m-n}\right) \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{p_i} \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{p_i} = \chi^2.$$

Dies ist genau die aus der Pearsonschen Theorie bekannte Kennzahl. Es ist demnach Ω^2 die Verallgemeinerung der Pearsonschen Prüffunktion χ^2 auf den Fall einer Matrix mit k Spalten und l Zeilen. Die naheliegende Anwendung des Pearsonschen Verfahrens auf Korrelationstabellen durch Bildung der Größe

$$\sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{(n_{ij} - E(n_{ij}))^2}{E(n_{ij})} = \Omega^2$$

ist hiermit als zulässig erwiesen; zu beachten ist lediglich, daß wegen der Nebenbedingungen (3) die Dimensionenzahl der Gaußschen Verteilung nicht gleich der um Eins verringerten Anzahl der Veränderlichen ist, sondern $(k-1)(l-1)$ beträgt[9]).

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung vermerken wir zum Schluß, daß, nachdem bekanntlich Erwartungswert und Streuung von χ^2

$$E(\chi^2) = k - 1 \quad \text{und} \quad Str(\chi^2) = 2(k-1)$$

ist, diese Größen für Ω^2 die Werte

$$E(\Omega^2) = (k-1)(l-1), \quad Str(\Omega^2) = 2(k-1)(l-1) \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

besitzen. Bemerkenswert ist endlich noch die für große χ_0 geltende asymptotische Formel für die Größe $P_k(\chi_0)$, die angibt, welche Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß im bestimmten Fall $\chi \geqq \chi_0$ ist. Sie lautet in der Pearsonschen Theorie[10])

$$P_k(\chi_0) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}\chi_0^2}\,\chi_0^{k-3}}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\,\chi^{k-2}\,d\chi} \quad \text{für sehr großes } \chi_0,$$

und daher für Ω im Falle einer Matrix mit k Spalten und l Zeilen

$$P_{k,l}(\Omega_0) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}\Omega_0^2}\,\Omega_0^{(k-1)(l-1)-2}}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\Omega^2}\,\Omega^{(k-1)(l-1)-1}\,d\Omega} \quad \text{für sehr großes } \Omega_0 \quad . \; . \; (14\text{a}).$$

6. Prüfung der Korrelationstabelle mittels der verallgemeinerten Lexisschen Zahl.

Die Untersuchungen des letzten Abschnitts haben erkennen lassen, daß unter allen möglichen Prüffunktionen für Kontrollrechnungen an Korrelationstabellen die Größe Ω^2 eine Ausnahmestellung einnimmt. Wir legen daher sie einem Prüfverfahren zugrunde und errechnen zu diesem Zwecke nochmals genau für endliches m den Erwartungswert. Es ist nach (13) und (6a)

$$E(\Omega^2) = \sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{1}{m\,p_i\,q_j} E(n_{ij} - m\,p_i\,q_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{1}{m\,p_i\,q_j} Str(n_{ij})$$

$$= \frac{m}{m-1} \sum_{i,j=1}^{k,l} (1-p_i)(1-q_j) = \frac{m}{m-1} \sum_{i=1}^{k} (1-p_i) \sum_{i=1}^{l} (1-q_j)$$

$$= \frac{m}{m-1}(k-1)(l-1).$$

---

[9]) Vergl. auch R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers. 7. Aufl. Edinburgh-London 1938, S. 93.
[10]) Zahl und Wirklichkeit. S. 282 Gl. (21).

Dieses Ergebnis

$$E(\Omega^2) = \frac{m}{m-1}(k-1)(l-1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14\text{b})$$

läßt sich zur Normierung der Prüffunktion Ω^2 verwenden. So entsteht mit

$$\frac{\Omega^2}{E(\Omega^2)} = \frac{m-1}{(k-1)(l-1)} \sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{(h_{ij} - p_i q_j)^2}{p_i q_j} = \frac{m-1}{(k-1)(l-1)} \left(\sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} - 1 \right) = L$$

eine statistische Kennzahl, die den Erwartungswert $E(L) = 1$ besitzt. Ihre Streuung exakt auszurechnen wäre wegen der vorkommenden Glieder vierten Grades in den n_{ij} recht umständlich, jedoch folgt für große m aus Gl. (14) hierfür sofort

$$Str(L) = Str\left(\frac{\Omega^2}{(k-1)\cdot(l-1)}\right) = \frac{Str(\Omega^2)}{(k-1)^2 (l-1)^2} = \frac{2}{(k-1)(l-1)}.$$

Die Ergebnisse lauten zusammengestellt

$$L = \frac{m-1}{(k-1)(l-1)} \left(\sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} - 1 \right), \quad E(L) = 1, \quad Str(L) = \frac{2}{(k-1)(l-1)} \quad \ldots (15).$$

Die Größe L ist eine Verallgemeinerung der bekannten Kennzahl aus der Lexisschen Dispersionstheorie, der sog. Lexisschen Zahl. In jener Theorie handelt es sich um unseren Fall $k = 2$ bei beliebigem l. In diesem Sonderfall wird mit $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, $n_{1j} = n_{0j}$ und $n_{2j} = n_j - n_{0j}$

$$\Omega^2 = \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{1j} - m p_1 q_j)^2}{p_1 q_j} + \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{2j} - m p_2 q_j)^2}{p_2 q_j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{0j} - p n_j)^2}{p n_j} + \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_j - n_{0j} - (1-p) n_j)^2}{(1-p) n_j}$$

$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{n_j}(n_{0j} - p n_j)^2 = \frac{1}{p(1-p)} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{n_j}(n_{0j} - p n_j)^2$$

und hieraus durch Division mit $E(\Omega^2) = \frac{m}{m-1}(l-1)$

$$L = \frac{m-1}{m(l-1)p(1-p)} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{n_j}(n_{0j} - p n_j)^2.$$

Dies ist aber die Lexissche Zahl[11]), womit erwiesen ist, daß unsere Größe L deren Verallgemeinerung auf Matrizen darstellt.

Man spricht von übernormaler Dispersion, wenn L größer als Eins, von unternormaler Dispersion, wenn L kleiner als Eins ausfällt, wobei aus der Streuung der Bereich folgt, innerhalb dessen Abweichungen von Eins auch von Zufallsergebnissen herrühren mögen. Besteht zwischen den beiden Merkmalsreihen ein Zusammenhang, so äußert sich dieser durch das Auftreten einer übernormalen Dispersion.

Das Höchstmaß übernormaler Dispersion tritt ein, wenn die einzelnen Teilmengen mit je n_j Elementen homogen sind. Der Korrelationszusammenhang wird dann so eng als möglich, was sich darin äußert, daß im Falle $k = l$ das Kontingenzmaß f^2 den Wert Eins annimmt, während im Falle $k \neq l$ zwar f^2 den Wert Eins nicht erreicht, jedoch die Maximalkorrelation K^2 Eins ergibt[12]). Es werde angenommen, die Teilmengen 1 bis l_1 enthalten nur Elemente der ersten Art, die Teilmengen $l_1 + 1$ bis l_2 nur solche der zweiten Art usw. Dann sind die Teilmengen der Nummern $l_{i-1} + 1$ bis l_i homogen aus Elementen der i-ten Klasse. Daher ist für diese $n_{ij} = n_j$ und demzufolge

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} = \sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i} n_j = \frac{1}{m_i} m_i = 1.$$

[11]) Vgl. Zahl und Wirklichkeit. S. 313 Gl. (36).

[12]) H. Gebelein: Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 364 bis 379.

Die ganze in (15) vorkommende Doppelsumme aber wird

$$\sum_{i,j=1}^{k,l} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} = k \quad \text{und damit} \quad L = \frac{m-1}{(k-1)(l-1)}(k-1) = \frac{m-1}{l-1}.$$

Naturgemäß ist im angenommenen Fall $k < l$. Ist umgekehrt $k > l$, so vertauschen sich lediglich die Anzahlen der Zeilen und Spalten. Für die Maximalwerte von L lautet daher das Ergebnis

$$L_{\max} = \frac{m-1}{l-1} \text{ für } k < l, \quad L_{\max} = \frac{m-1}{k-1} \text{ für } k > l \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Für eine 2×2-Tafel stimmt, wie auf Grund der Beziehungen (12a) und (9b) leicht einzusehen ist, die Kennzahl L mit dem Quadrat der obigen Kennziffer T von (9a) für die Treffsicherheit überein. Dagegen erhält man im allgemeinen verschiedene Ergebnisse bei der Prüfung umfangreicherer Korrelationstabellen. Das L-Verfahren dürfte der Schellingschen T-Probe aus zwei Gründen überlegen sein. Erstens beschränkt sich seine Anwendbarkeit nicht auf quadratische Matrizen; zweitens ist es invariant gegenüber einer Umstellung der Merkmale innerhalb der einzelnen Merkmalsreihen. Auch die Tatsache, daß für großes m nicht nur Erwartungswert und Streuung der Größe L bekannt sind, sondern die durch Tabellen erfaßbare Wahrscheinlichkeitsverteilung selbst, kann als ein Vorzug gelten. Die mit der L-Probe verbundene Rechenarbeit ist, wenn man die Formeln (15) benützt, nicht erheblich.

Zahlenbeispiele: Die beiden statistischen Aufnahmen von Beispiel 1 liefern ohne weitere Rechnung wegen $L = T^2$ im Falle der Breslauer Versuchsreihe $L = 100{,}8$, im Falle der Gottesberger Versuchsreihe aber nur $L = 15{,}36$. Die Größe P nach Gl. (14a) wird daher im ersten Fall rund 10^{-23}, im zweiten etwa 10^{-4}. Man ersieht, wie außerordentlich viel beweiskräftiger das Breslauer Ergebnis ist im Vergleich zur anderen Beobachtung, und dies trotz des absolut geringeren Korrelationskoeffizienten r. Im Falle des Beispiels 2 mit den beiden Würfeln ergibt die Rechnung mit $k = 6$ und $l = 5$ und den Zahlenwerten der Zahlentafel 2

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} = 1{,}0493 \quad \text{und daher mit} \quad m = 342$$

$$L = \frac{341}{5 \cdot 4}(1{,}0493 - 1) = \underline{0{,}841}; \quad \sqrt{Str(L)} = 0{,}316.$$

Die sich zeigende geringe unternormale Dispersion kann zu keinen Folgerungen Anlaß geben, denn der Wert für L fällt noch innerhalb der einfachen Streuungsgrenzen $1 \pm 0{,}316$. Es ergibt sich keinerlei Hinweis auf das Bestehen eines Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalsreihen. Beispiel 3 endlich liefert mit $k = l = 4$ und Zahlentafel 3

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{n_{ij}^2}{m_i n_j} = 1{,}474 \quad \text{und daher mit} \quad m = 88$$

$$L = \frac{87}{3 \cdot 3}(1{,}474 - 1) = \underline{4{,}58}; \quad \text{dazu} \quad \sqrt{Str(L)} = 0{,}472.$$

Der Wert L liegt etwas höher als die oben errechnete Größe $T = 4{,}25$. Da er weit außerhalb der Streuungsgrenzen $1 \pm 0{,}472$ liegt, besteht an der Tatsache eines Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalsreihen kein Zweifel. Hingegen gibt f^2 als Korrelationsmaß mit seinem Wert

$$f^2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 3}}(1{,}474 - 1) = \underline{0{,}158}$$

keinen anschaulichen Begriff von der Enge und vor allem keinen zutreffenden Begriff von der Bedeutung dieses Korrelationszusammenhangs.

Während bei den üblichen Korrelationsmaßen ein Vergleich mit dem nichtstatistischen Grenzfall des vollständigen funktionsmäßigen Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalsreihen angestellt wird, um so ein Urteil über die Enge der Verknüpfung zu gewinnen, geschieht bei den hier beschriebenen Prüfverfahren ein Vergleich mit dem entgegengesetzten Grenzfall vollständiger Unabhängigkeit beider Merkmalsreihen, der selbst ein statistisches Problem darstellt. Das Ergebnis dieses Vergleichs ist ein Urteil über die Bedeutung des zutage tretenden Korrelationszusammenhangs. 406

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. WALTER **TRAUPEL**, Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen axialen Turbomaschine. 150 S. m. 32 Fig. u. 4 Tafeln. Zürich und Leipzig 1942. Verlag Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 7.20 M.

Der Verfasser hat in dem wertvollen Büchlein mit Erfolg versucht, das weit verstreute und von sehr verschiedenen Gesichtspunkten ausgehende Schrifttum in einen einheitlichen Gedankengang zusammenzufassen. Darüber hinaus liefert er in der Arbeit für die Theorie der Strömungsmaschine verschiedene wichtige Beiträge. Das Buch enthält zunächst eine Ableitung und Zusammenstellung der für Turbine und Verdichter gemeinsam geltenden Grundgleichungen, die sich aus der Theorie des mittleren Stromfadens ergeben. Anschließend behandelt es die bei den Strömungsversuchen an Schaufelgittern auftretenden grundsätzlichen Fragen, vor allem in bezug auf die Zulässigkeit der meistens gemachten Vernachlässigungen bei den Messungen. Die Ergebnisse der Gitterversuche werden in verschieden definierten Verlustkennzahlen zusammengefaßt und deren Brauchbarkeit bei der Berechnung von einzelnen Stufen und ganzen Strömungsmaschinen auf Grund der Gitterversuche nachgewiesen. Den Abschluß bildet eine Theorie der räumlichen Strömung zähigkeitsfreier Flüssigkeiten in der Turbomaschine.

Die meisten Ableitungen und Betrachtungen des Buches beziehen sich auf die unzusammendrückbare Flüssigkeit. Es werden aber an mehreren Stellen Hinweise darauf gegeben, inwiefern sich die zusammendrückbare Flüssigkeit unterscheidet. Verschiedentlich bringt der Verfasser durchaus neuartige Gedanken und Darstellungsweisen, die sich für die Theorie als sehr fruchtbar erweisen. Immerhin dürften nicht alle Ausführungen in diesen Abschnitten vom Physiker oder Mathematiker ohne gewisse Bedenken hingenommen werden können. Das ist aber bei allen Arbeiten so, in denen neue Wege gezeigt werden.

Es ist kaum anzunehmen, daß das Buch die zur Zeit im Gebrauch befindlichen Berechnungsverfahren von Strömungsmaschinen wesentlich abändern wird, trotzdem diese Verfahren dringend einer Erneuerung bedürfen. Auch die weitgehend verfeinerten in dem Buch dargestellten Theorien können nämlich nicht zu einer wirklich sicheren Vorausberechnung von Beschauflungen führen. Der Verfasser weist selbst mehrfach ausdrücklich auf die Schranken hin, die der Theorie und auch unseren Versuchsverfahren bis heute anhaften. Trotzdem sollte das Buch überall dort gelesen werden, wo man sich um das tiefere Eindringen in die Vorgänge innerhalb der Strömungsmaschine bemüht. Hier kann es fruchtbare Dienste leisten, die sich auch für den Strömungsmaschinenbau auswirken werden.

Augsburg. E. Sörensen. 415

Dr. phil. HERMANN **ATHEN**, Ballistik. (Hochschulwissen in Einzeldarstellungen.) 298 S. m. 40 Abb. Leipzig 1941, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 8.60 M.

Das Buch ist in 5 Hauptteile gegliedert: 1. Äußere Ballistik, 2. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die B., 3. Schußtafel-B., 4. innere B., 5. die B. des Bombenwurfs.

Es bringt neben den alten bekannten Verfahren, die für besondere Zwecke noch immer ihre Bedeutung in der Ballistik behauptet haben, die Ergebnisse der letzten Jahrzehnte (die in dem grundlegenden Werk von Cranz nicht mehr berücksichtigt werden konnten).

Besonders hervorzuheben sind neuere Betrachtungen über den Luftwiderstand, Sätze über ähnliche Flugbahnen, Parameterentwicklungen für Flugbahnscharen, der Abschnitt über photogrammetrische Flugbahnvermessung und die Behandlung der Störungsrechnung.

Einige Dinge sind dem Ref. bei der Durchsicht aufgefallen: Bei der Herleitung des Stabilitätsfaktors von Geschossen darf die Querkraft nicht vernachlässigt werden. — Ein „amerikanisches" Luftwiderstandsgesetz gibt es nicht. Den Exterior Ballistic Tables liegt (bis auf einen Maßstabsfaktor) das Gesetz von Gâvre zugrunde. — Das „Normalluftgewicht" bei Heer und Marine ist verschieden, 1,22 gegen 1,245 kg/m³. — Bei den Betrachtungen über den Luftwiderstand sollten die Ergebnisse der Aerodynamik ausführlicher erwähnt werden.

Die innere Ballistik tritt im Vergleich zur äußeren etwas zurück.

Ein ausführlicher Schrifttumnachweis und eine Zusammenstellung wichtiger mathematischer Sätze und Formeln ergänzt das Buch.

Das Werk vermittelt trotz teilweise gedrängter Fassung in klarer Weise die theoretischen Grundlagen der Ballistik, wobei jedoch vielfach Brücken nach der praktischen Seite hin geschlagen werden (im Gegensatz etwa zu dem Werk von Popoff). Der Verfasser hat sein Ziel, die wissenschaftlichen Grundlagen der Wehrtechnik zu vertiefen und zu ihrer Verbreitung beizutragen, voll erreicht. Da der Inhalt des Buches zum unentbehrlichen Rüstzeug jedes Ballistikers gehört, so wird sich das Werk neben den übrigen Darstellungen zweifellos einen guten Platz erobern.

Essen. K. Stange. 410

Dr.-Ing. RICHARD EMIL **KUTTERER**, Ballistik, mit einem Vorwort von Geh. Reg.-Rat Dr. C. Cranz. (Die Wissenschaft, Einzeldarstellungen aus der Naturwissenschaft u. der Technik, Bd. 97, herausgegeben von Prof. Dr. Wilhelm Westphal.) VIII + 208 S. Braunschweig 1942, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 13,50 M.

Als 97. Band in der Reihe „Die Wissenschaft, Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik" erschien diese Einführung in die Ballistik von Regierungsrat Dr.-Ing. Richard Emil Kutterer, einem Schüler von C. Cranz, der diesem Werk ein anerkennendes Vorwort schrieb.

Das Buch betont vorwiegend die technisch-physikalische Seite der Ballistik. Mathematische Ableitungen werden durchweg möglichst elementar gehalten, z. T. auch ohne Beweis angegeben, jedoch meist so, daß der Anschluß an eingehendere theoretische Darstellungen möglich bleibt. Eine klare Darstellungsweise, ausgezeichnete Aufnahmen des fliegenden Geschosses und eine große Anzahl eindringlicher Zahlenbeispiele machen dieses Werk zu einer gut verständlichen Darstellung der Grundzüge der Ballistik.

Aus dem ersten — verhältnismäßig kurzen — Abschnitt „Äußere Ballistik" sind zu erwähnen die ausführliche Darstellung der experimentellen Methoden und die Einbeziehung aerodynamischer Gesichtspunkte in einzelne Probleme der äußeren Ballistik. Die mathematischen Grundlagen zur Berechnung von Flugbahnen werden nur kurz gestreift. Der zweite Teil „Innere Ballistik" ist ziemlich eingehend; auch er bringt neben der theoretischen Behandlung des innerballistischen Gleichungssystems hauptsächlich eine Darstellung experimenteller Methoden der Innenballistik, wobei der Verfasser umfangreiche eigene Erfahrungen auf diesem Teilgebiet mit Nutzen verwertet. Den

Schluß des Buches bilden Tabellen- und Formelauszüge sowie Schrifttums-, Namen- und Sachverzeichnisse.

Das Buch ist dem Neuling in der Ballistik ebenso zu empfehlen wie den erfahrenen Ballistikern, unter denen gerade die reinen Theoretiker dem Verfasser für diese klare Einführung in den technisch-physikalischen Teil der Ballistik dankbar sein werden.

Berlin. H. Athen. 392

THEODOR **VAHLEN,** Ballistik. 2. Aufl. neubearb. u. herausgeg. unter Mitwirkung von Alfred Klose. X + 267 S. m. 65 Abb. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 18 M.

Das Buch bringt in 18 Kapiteln eine umfassende Übersicht über den gesamten ballistischen Problemkreis. Behandelt werden u. a.: die in der Außenballistik wirkenden Kräfte, Grundlegung der Bewegungsgleichungen und allgemeine Flugbahneigenschaften, Reihenentwicklungen und speziell Potenzreihen, Grenzfälle und allgemeine Lösungsklassen, praktische Lösungsmethoden, Geschoßbahnstörungen, konische Pendelung, Drallfragen, Übergangsballistik, Innenballistik, ballistische Wahrscheinlichkeitsrechnung, Endballistik.

Die 2. Auflage unterscheidet sich in ihrem Gesamtcharakter nicht von der 1. Auflage (1922). In einzelnen Kapiteln sind jedoch wesentliche Neuerungen aufgenommen worden, davon besonders erwähnenswert: die veränderte Behandlung des Luftwiderstandes, die Grundlegung der außenballistischen Bewegungsgleichungen, das Kapitel über die praktischen Lösungsmethoden der Außenballistik, die Betrachtungen über Iterationslösungen in der „kosmischen" Ballistik und das neue innenballistische Lösungsverfahren von Vahlen.

Das Werk vermittelt durch schärfste Systematik und mathematische Sauberkeit einen hervorragenden Einblick in den wissenschaftlichen Grundgedanken der theoretischen Ballistik. Insofern ist im Rahmen des vorliegenden Buches das von Vahlen erstrebte Ziel eines klaren und systematischen Aufbaues der Ballistik voll erreicht worden.

Berlin. Dr. H. Athen. 411

Dr.-Ing. HANS **KNOBLOCH,** Die Ballistik in der Luftwaffe, vom Bombenwerfen, Schießen und vom Treffen. (Luftfahrt-Lehrbücherei, Bd. 12.) 78 S. m. 72 Abb. Berlin 1942, Verlag Dr. M. Matthiesen & Co. Preis kart. 3,80 M.

Das Buch gibt einen leichtverständlichen Einblick in die Probleme der Ballistik bei der Luftwaffe. Neben den allgemeinen Begriffen, wie Schwerkraft, Luftwiderstand, Drall und Pfeilflug, wird die Bombenballistik vom Standpunkt des Soldaten, des Meßtechnikers und des Ballistikers mit der Darstellung des Bombenwurfes aus dem Horizontalflug, Sturzflug und Tiefflug, sowie des Wurfes von Brandbomben ausführlich behandelt. Ein kurzer Abschnitt hat die Ballistik für das Schießen vom Flugzeug aus zum Gegenstand; nach der Schilderung allgemeiner Voraussetzungen wird sie vom Standpunkt des ruhenden und des mitbewegten Beobachters behandelt.

Das Buch wendet sich an alle, die an den speziellen Fragen der Ballistik der Flugzeugwaffen Interesse haben; für den Leser mit mathematischen Elementarkenntnissen sind viele Beziehungen zusätzlich noch in Formeln gefaßt. Die Darstellungsweise des Büchleins ist klar und einfach; durch zahlreiche Abbildungen wird das Verständnis vertieft. Dem Charakter des Buches entsprechend wäre ein Eingehen auf die Wirkung der Bomben und Geschosse im Ziel, sowie auf die besonderen Fragen der Treffwahrscheinlichkeit beim Schießen im Luftkampf erwünscht gewesen.

Berlin. Dr. H. Athen. 412

Dr. FRANZ **BAUR,** Prof. a. d. Universität Frankfurt/M., Einführung in die Großwetterforschung. (Math.-Phys. Bibl. Reihe I: herausgegeben von W. Lietzmann und W. Kliefoth, Bd. 88.) 2. verb. Aufl. 53 S. m. 14 Abb. im Text. Leipzig-Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Die kleine, aber außerordentlich inhaltreiche Schrift von F. Baur „Einführung in die Großwetterforschung" ist in zweiter, verbesserter Auflage erschienen. In ihr behandelt der Verfasser, der als Forscher auf dem Gebiet der Langfristvorhersage und als Leiter des Forschungsinstitutes für langfristige Vorhersagen des Reichswetterdienstes allgemein bekannt geworden ist, nachstehende Kapitel: „Großwetter und mittlere Luftdruckverteilung — Wärmehaushalt und allgemeiner Kreislauf der Atmosphäre — Witterungsperioden und Wetterrhythmen — Geophysikalische Einflüsse auf das Großwetter — kosmische Einflüsse auf das Großwetter — Die langfristige Wettervorhersage." Gegenüber der ersten Auflage sind vor allem die Abschnitte über den Wärmehaushalt, über Luftdruckrhythmen und über die 10tägige Wettervorhersage verbessert und erweitert worden. Die Darstellung ist so anschaulich und fesselnd und die Bedeutung der behandelten Probleme — vor allem für wirtschaftliche Fragen — so groß, daß dieser Schrift eine recht weite Verbreitung zu wünschen ist.

z. Zt. Großenhain. H. Goldschmidt. 407

WERNER **HEISENBERG,** Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft. 6 Vorträge. 3. erw. Aufl. 95 S. Leipzig 1942, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 3,50 M.

Zu den Aufsätzen der beiden ersten Auflagen („Wandlungen der Grundlagen der exakten Naturwissenschaft in jüngster Zeit" aus dem Jahre 34; „Zur Geschichte der physikalischen Naturerklärung", 32; „Prinzipielle Fragen der modernen Physik", 35) sind drei weitere hinzugekommen: „Gedanken der antiken Naturphilosophie in der modernen Physik" (Antike, Band XIII); „Die Goethesche und die Newtonsche Farbenlehre im Lichte der modernen Physik" (41) und „Die Einheit des naturwissenschaftlichen Weltbildes" (41). Der hohe Genuß, mit dem man jeden einzelnen dieser Aufsätze liest, beruht einmal darauf, daß hier ein Forscher zu uns spricht, der entscheidende Wendungen in der Entwicklung der Physik unserer Tage selbst mit herbeigeführt hat, dessen Führung man sich also wie kaum einem anderen anvertrauen kann. Dazu kommt aber, daß die Gedankengänge in einer Klarheit und Durchsichtigkeit ablaufen, daß die Darstellung durch eine Schönheit und Treffsicherheit des Ausdrucks gekennzeichnet ist, die man leider nicht allzu häufig in den für ein weiteres Publikum bestimmten Aufsätzen wissenschaftlichen Inhalts findet. Unwillkürlich wird man an die glänzenden Helmholtzschen populärwissenschaftlichen Vorträge erinnert. Interessant ist dabei, die Wandlung in der Grundeinstellung zur Wissenschaft festzustellen, die in den Heisenbergschen Aufsätzen zum Ausdruck kommt: trotz zuversichtlicher Stimmung, trotz des Vertrauens in den Fortschritt der Wissenschaft finden wir doch darin eine zurückhaltende Bescheidenheit, eine, man könnte vielleicht sagen agnostische Haltung, die der Wissenschaft des ausgehenden 19. Jahrhunderts fast unbekannt war. Heisenberg charakterisiert diese Einstellung in seinem letzten Aufsatz mit folgenden Worten: „Wir sind uns mehr als die frühere Naturwissenschaft dessen bewußt, daß es keinen sicheren Ausgangspunkt gibt, von dem aus Wege in alle Gebiete der Erkenntnis führen, sondern daß alle Erkenntnis gewissermaßen über einer grund-

losen Tiefe schweben muß, daß wir stets irgendwo in der Mitte anfangen müssen, über die Wirklichkeit zu sprechen mit Begriffen, die erst durch ihre Anwendung allmählich einen schärferen Sinn erhalten, und daß selbst die schärfsten, allen Anforderungen an logischer und mathematischer Präzision genügenden Begriffssysteme nur tastende Versuche sind, uns in begrenzten Bereichen der Wirklichkeit zurechtzufinden."

Berlin. E. Mosch. 408

Dr. phil. nat. habil. MAX **STECK**, Dozent der Math. a. d. Techn. Hochschule München, Das Hauptproblem der Mathematik. XVI + 232 S. Berlin 1942, Dr. Georg Lüttke Verlag. Preis geb. 10,60 M.

Verf. sieht das Hauptproblem der Mathematik in der Untersuchung ihrer denkerischen Grundlagen, aus denen durch logische Operationen die Erkenntnisse gewonnen werden, „die von apodiktischer Sicherheit, die einfach die Wahrheit selbst sind". Dieses Hauptproblem stellt sich ihm unter zwei Aspekten dar: Der Problemkreis A befaßt sich mit der Aufstellung eines Axiomsystems im Sinne des Formalismus; der Problemkreis B hat die Gewinnung gewisser ideeller Gebilde zum Ziel, hinter denen denkerisch reine Ideen des Mathematischen stehen, die ebenfalls axiomatisch erfaßt werden müssen, und die dann erst die wahren Grundsätze der Mathematik liefern. Die mathematische Forschung unserer Zeit befindet sich nach Meinung des Verf. auf falschem Wege. Sie hat sich dem Formalismus und Logizismus verschrieben. Die Denkweise der von ihm so genannten „deutschen Linie", die in Plato ihren Ursprung hat und über die griechischen Mathematiker und den Neuplatonismus zur mittelalterlichen deutschen Mystik und weiter über Nicolaus Cusanus, Dürer, Copernicus und Kepler zu Leibniz und Kant führt und noch in den nachkantischen Idealismus hineinreicht, mußte infolge des Einflusses namentlich jüdischer Forscher der „westlichen Linie" weichen, die bei den Sophisten beginnt und über Aristoteles schließlich zu Descartes (auch Galilei ist davon nicht unberührt geblieben) und dann über die Aufklärung zum Positivismus des 19. Jahrhunderts führt. Die Mathematiker der deutschen Linie, denen eine „urbildlich-noëtische" Denkweise eigen ist, waren sich noch der unzertrennlichen Verbundenheit der beiden Problemkreise A und B bewußt, während die westliche Linie mit ihrer „abstrakt-nominalistischen" Denkweise dem Problemkreis B verständnislos gegenübersteht und nicht die reine Wahrheit anstrebt, sondern diesen Begriff durch den der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems A ersetzt. Mathematische Hauptrichtungen dieser westlichen Linie sind der Empirismus (Pasch), der Formalismus (Hilbert) und die Logistik (Russel-Whitehead-Scholz). Verf. bemüht sich, namentlich auch mit Hilfe zahlreicher Äußerungen mathematischer Forscher aus allen Lagern — die Belegstellen nehmen allein etwa 40 % des Buches ein —, die Unrichtigkeit und Schädlichkeit jener Richtungen unter Beweis zu stellen, wobei er besondern heftig den Hilbertschen Standpunkt angreift. Der Ton seiner Ausführungen ist oft reichlich scharf; seine Erregung macht sich in zwischen die gegnerischen Darlegungen eingestreuten ironischen Bemerkungen und Ausrufungszeichen Luft, die, ebenso wie etwa der persönliche Angriff gegen Scholz (S. 149, Anm.), kein sachliches Material zur Widerlegung der Gegner beisteuern. — Verf. sieht in der Platonischen Ideenlehre und dem Kantschen erkenntnistheoretischen Standpunkt die Ausgangspunkte zur Lösung des Hauptproblems, einer Lösung, die er in einer Synthese von Formalismus und Intuitionismus erblickt. — Da es sich beim mathematischen Grundlagenstreit doch wohl um gegensätzliche geistige Grundeinstellungen erkenntnistheoretischer, ja metaphysischer Art handelt, so dürften auch die temperamentvollen Ausführungen des Verf. kaum imstande sein, Andersgläubige zu bekehren, die dann allerdings das herbe Urteil des Verf. auf sich nehmen müssen (S. 213), daß sie das Wesen des Mathematischen überhaupt nicht erkannt haben, ein Urteil, durch das die Bedeutung eines Mathematikers vom Range Hilberts — der doch wohl auch jenem Vorwurf ausgesetzt wäre — kaum geschmälert werden dürfte. Verf. schließt seine Arbeit mit der Mahnung, auch in der Mathematik das Erbe, das die großen Deutschen und die arischen Forscher denkerisch errungen haben, getreulich zu verwalten und zu mehren.

Berlin. E. Mosch. 409

Prof. Dr. PAUL **RIEBESELL**, Mathematik des täglichen Lebens. 52 S. Hamburg 1942, Hanseatische Verlagsanstalt. Preis kart. 2 M.

Plaudereien über Fragen des täglichen Lebens, die mit Hilfe des Zahlenrechnens, der Mathematik oder der Statistik behandelt werden können. Das Heft wird hoffentlich viele anregen, über die angeschnittenen Probleme nachzudenken und sich eingehender mit ihnen zu beschäftigen. Allerdings werden zum Teil Kenntnisse und vor allem eine Denkfähigkeit vorausgesetzt, wie wir sie heute z. B. nur bei sehr wenigen der Abiturienten unserer höheren Schulen finden.

Dresden. Willers. 391

Prof. Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER**, em. ord. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Vermessungskunde I, Stückmessung und Nivellieren. 7. Aufl. (Samml. Göschen, Bd. 468). 168 S. mit 145 Fig. Berlin und Leipzig 1942, Verlag Walter de Gruyter u. Co. Preis geb. 1,62 M.

Nach der im Jahre 1938 vom Verlag de Gruyter herausgegebenen sechsten Auflage des Bandes 468 der Sammlung Göschen, der aus dem Gebiete der Vermessungskunde die Kapitel „Stückmessung und Nivellieren" behandelt, erscheint im gleichen Verlag schon wieder eine neue, die siebente Auflage des genannten Bändchens, ein Beweis für die berechtigte Beliebtheit auch dieser Arbeit von P. Werkmeister. Inhaltlich hat sich an den vorzüglichen Ausführungen nichts geändert, und auch in der Ausstattung hat die Neuauflage trotz der kriegsbedingten Schwierigkeiten in keiner Weise gelitten.

Freiberg-Sa. H. Müller. 394

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. FRIEDRICH **KLINGER**, Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Herausgeg. mit Unterstützung der Akademie der Wissenschaften in Wien. VII + 152 S. m. 1 Tafel. Wien 1942, Springer-Verlag. Preis brosch. 12 M.

Dr. KARL **GEY**, Oberstudiendirektor in Leipzig, Vierstellige Tafel der Logarithmen und Antilogarithmen, Praktisches Hilfsmittel für Überschlags-, Kontroll- und abgekürzte Rechnungen, Anhang: Die trigonometrischen Funktionen für die ganzen Grade. 8. S. Bonn und Berlin 1942, Ferd. Dümmlers Verlag. Preis brosch. 0,90 M.

NACHRICHTEN

Rudolf Rothe zum Gedächtnis.

Wenige Tage nach Vollendung seines 69. Lebensjahres starb am 26. Oktober 1942 in Berlin der ord. Professor Dr. Rudolf Rothe, Emeritus und Ehrensenator der Technischen Hochschule Berlin. Mit ihm verliert die Deutsche Mathematikerschaft einen namhaften Gelehrten und die Berliner Technische Hochschule einen ihrer angesehensten Lehrer, der weit über die Grenzen seines Faches hinaus bekannt und beliebt war. Wir aber, die wir das Glück hatten, Rudolf Rothe näher kennenzulernen, die wir als seine Schüler von ihm lernten, als Assistenten ihm zur Seite standen, als Kollegen mit ihm gemeinsam arbeiteten, wir sehen in Rudolf Rothe mehr als nur einen bedeutenden Wissenschaftler und hervorragenden Pädagogen, wir trauern auch um den Menschen: die Lauterkeit seines Wesens, den Ernst seiner Lebensauffassung, seine gelassene Heiterkeit, die auch den anstrengendsten Arbeitstag überdauerte, die vorbildliche Pflichttreue, die Nachsicht, mit der er die Schwächen der Mitmenschen ertrug, die Strenge gegen sich selbst — dies alles liebten wir an Rudolf Rothe, dem feinsinnigen musischen Menschen, dem gütigen Mentor, dem aufrechten deutschen Mann, der am 27. Januar 1919 seine Vorlesungen ausfallen ließ, weil der Kaiser Geburtstag hatte, dem ganzen Kerl, der noch mit fast 60 Jahren das Matterhorn bestieg! Rudolf Rothe wird uns allen immer unvergeßlich bleiben.

Rudolf Ernst Rothe wurde am 15. Oktober 1873 in Berlin geboren. Durch den frühen Tod des Vaters, der seine Familie in engen wirtschaftlichen Verhältnissen zurückließ, lernten Rudolf und seine drei jüngeren Schwestern schon frühzeitig den Ernst des Lebens kennen. Rudolf besuchte das Sophiengymnasium, das er 1892 mit dem Reifezeugnis verließ. Er studierte dann an der Universität Berlin, wo damals H. A. Schwarz Weierstraß' geistiges Erbe betreute und mehrte, Mathematik und Naturwissenschaften. Neben H. A. Schwarz und L. Fuchs gewann vor allen der Flächentheoretiker Johannes Knoblauch Einfluß auf den jungen Rothe, mit dem er persönlich eng befreundet war. Die frohe Kameradschaft im Mathematischen Verein an der Berliner Universität, dem Rothe auch noch später als Alter Herr die Treue hielt, sorgte dafür, daß die strenge Wissenschaft dem jungen Studenten nicht über den Kopf wuchs. Übrigens zeigte Rothe schon damals Verständnis für die Frage der mathematischen Ingenieurausbildung, indem er in den Übungen von Lampe an der Technischen Hochschule Charlottenburg assistierte, sehr zum Mißvergnügen von H. A. Schwarz, der es gar nicht verstehen konnte, was ein reiner Mathematiker in Charlottenburg zu suchen hatte, „wo die Leute mit dem Reißbrett über die Straße gehen". Rothe promovierte 1897 mit einer differentialgeometrischen Arbeit (Untersuchungen über die allgemeine Theorie der isothermen Flächen), an die sich eine ganze Reihe schöner Beiträge zur Flächentheorie anschloß. Nach Beendigung des Studiums trat Rothe 1897 als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ein, in der damals Warburg regierte. In den folgenden Jahren veröffentlichte Rothe neben seinen differential-geometrischen Arbeiten verschiedene physikalische Untersuchungen, die erkennen lassen, mit welchem Eifer er sich seinen Aufgaben bei der Reichsanstalt widmete, bei der er inzwischen etatsmäßiger Mitarbeiter geworden war (1901). Noch nach langen Jahren dachte Rothe gern an diese Zeit zurück, wobei er stets versicherte, daß er dort bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt erst richtig Physik gelernt hätte. 1905 habilitierte sich Rothe an der Technischen Hochschule Charlottenburg und wurde drei Jahre später als Nachfolger von Horn nach Clausthal berufen, wo er neben der Höheren Mathematik auch die Mechanik vortrug. 1914 folgte Rothe einem Ruf nach Hannover und kehrte schon im folgenden Jahr nunmehr endgültig an die Technische Hochschule Charlottenburg auf den Lehrstuhl von Hettner zurück. Neben seiner Lehrtätigkeit an der Technischen Hochschule hielt Rothe im Weltkrieg zeitweise auch an der Berliner Universität Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung und Differentialgeometrie. Vor allen Dingen aber führte Rothe damals gemeinsam mit Geheimrat Cranz, dem Nestor der deutschen Ballistik, wichtige Untersuchungen durch, die mit Rücksicht auf die erforderliche Geheimhaltung gar nicht oder erst sehr viel später veröffentlicht werden durften. So z. B. bestimmte Rothe auf zeichnerischem Wege Flugbahn und Geschwindigkeit der Granaten des Parisgeschützes. Auf den Zusammenbruch vom Jahre 1918, unter dem Rothe, ein Mann von reinster vaterländischer Gesinnung, unsagbar gelitten hat, folgten lange Jahre rastloser, wissenschaftlicher, pädagogischer und auch administrativer Tätigkeit, war doch Rothe in der schwierigen Inflationszeit Rektor der Technischen Hochschule und später noch mehrere Jahre Dekan der allgemein-wissenschaftlichen Fakultät. Bei allen diesen Pflichten fand Rothe noch Zeit und Kraft zu vielseitiger literarischer Arbeit: in den Jahren 1925 bis 35 entstanden die drei Bände seiner „Höheren Mathematik", 1927 erschienen die von Rothe bearbeiteten Vorlesungen über Variationsrechnung von Karl Weierstraß (1915 hatte Rothe schon den Band „Anwendungen der elliptischen Funktionen" herausgegeben), 1931 schrieb er (gemeinsam mit Ollendorf und Pohlhausen) die angewandte Funktionentheorie, 1937 die Differentialgeometrie. Daneben bearbeitete Rothe in mehreren Auflagen des Ingenieurtaschenbuches „Hütte" den mathematischen Abschnitt, hielt im Telegraphentechnischen Reichsamt und im Außeninstitut der Technischen Hochschule Vorträge für in der Praxis stehende Ingenieure und leitete ein schulmathematisches Kolloquium, in dem er mit den Lehrern der Höheren Schule daran arbeitete, die Beziehungen zwischen Schule und Hochschule enger und fruchtbarer zu gestalten. Schließlich widmete Rothe auch noch der studentischen Sozialfürsorge als Mitglied der verschiedenen Ausschüsse Zeit und Kraft. Als nach Wiederherstellung der Wehrhoheit in Deutschland an der Technischen Hochschule eine wehrtechnische Fakultät eingerichtet wurde, übernahm Rothe zu den alten Pflichten noch das Ordinariat für Ballistik, nachdem er schon vorher regelmäßig über dieses Thema Vorlesungen gehalten hatte. Seine eigenen wissenschaftlichen Veröffentlichungen im einzelnen aufzuführen ist hier nicht der Ort. Zu den physikalischen Arbeiten der Frühzeit und zu den zahlreichen differential-geometrischen Veröffentlichungen gesellten sich im Laufe der Jahre noch viele verschiedensten Inhalts: über Fragen der praktischen Analysis, über den Mittelwertsatz und die Taylorsche Formel, über wiederholte Quadraturen, über die Abelsche Integralgleichung, über schulmathematische und ballistische Probleme. Überragend war Rothes pädagogische Kunst: wie vorzüglich verstand er es, seine Zuhörer zu fesseln! Das Auditorium Maximum der Technischen Hochschule war in den Jahren des großen Andrangs zu den Hochschulen bis auf den letzten der 650 Plätze und darüber hinaus gefüllt: auch auf den Stufen und Fensterbrettern saßen die Studenten und hör-

ten ihrem verehrten Professor Rothe andächtig zu. In seiner frischen humorvollen Art, mit kraftvoller Stimme und vorbildlich klarer Schrift an der Tafel machte Rothe seinen Hörern die ihnen von Hause aus kaum sympathische Mathematik so schmackhaft, daß sie geduldig aushielten, bis Rothe es für gut befand, die Vorlesung zu schließen. Die Studenten wußten aber auch, daß sie an Rothe den verständnisvollsten und gütigsten Freund hatten, bei dem sie jederzeit für ihre Nöte und Anliegen ein offenes Ohr fanden, und bewiesen ihm ihre Zuneigung bei jeder Gelegenheit. Auch zwischen den Bergleuten an der Technischen Hochschule und Rothe bestand eine sicherlich nicht wissenschaftlich — Rothe prüfte die Bergleute im Vorexamen —, sondern nur menschlich und historisch (von seiner Clausthaler Zeit her) fundierte Freundschaft, die sich bei dem alljährlich wiederkehrenden Barbarafeste aufs herzlichste äußerte. Rothes besondere Liebe galt natürlich den jungen Mathematikern und Physikern, die, soweit sie bedürftig und würdig waren, aus den Erträgnissen der Rotheschen „Johannastiftung" ein Stipendium erhalten konnten.

Rothes Arbeitskraft schien unverwüstlich. Wenige Urlaubswochen, die er in seinen geliebten bayerischen oder tiroler Bergen verlebte, genügten völlig, um ihn für ein weiteres Jahr angestrengtester Arbeit zu stärken. Dabei waren diese Ferien keineswegs der Ruhe gewidmet, sondern mit beachtlichen alpinistischen Leistungen ausgefüllt, von den nie abreißenden Korrekturarbeiten ganz zu schweigen, die Rothe auf jeder Reise begleiteten.

Auch als Rothe im Jahre 1939 emeritiert wurde, bedeutete das bei ihm natürlich nicht, daß er nun die Hände in den Schoß legte. In den letzten Jahren wurde der Unermüdliche allerdings durch ein seit 1938 immer wieder aufflackerndes Leiden zeitweise zur Untätigkeit gezwungen. Und nun hat der Tod diesem an Arbeit und Erfolg überreichen Leben ein Ziel gesetzt, zu früh für alle, die Rudolf Rothe kannten und ihn nie vergessen werden: zu früh, obwohl nach menschlichem Ermessen niemand mehr von seinem Leben erwarten darf, als Rothe so reichlich zuteil wurde. War doch auch sein Leben erfüllt im Sinne der trostreichen Worte von Wildenbruch:

Sterben ist nur eines Tages Enden,
Tod nur Schlaf der niemals wach Gewesenen
Nie entschläft, wer einmal wach gelebt.

Freiberg. Grüß. 431

Persönliches.

Ende September verstarb der Obmann des Ausschusses für Rechentechnik im Reichsausschuß für wissenschaftliche Fertigung Studienrat H. Schwerdt, der durch seine Bücher über Nomographie bekannt geworden ist.

Dem o. Prof. Geheimen Rat Dr. Dr. e. h. Sebastian Finsterwalder, München, wurde aus Anlaß der Vollendung des achtzigsten Lebensjahres in Anerkennung seiner Verdienste um die mathematischen Wissenschaften die Goethemedaille verliehen.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

H. Peineke, **Fehlerbetrachtung zur Rinaldinischen Regel.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 116—117.

1. Fehlerbetrachtungen zur Rinaldinischen Regel und auch zur Näherungskonstruktion des Herzogs Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar-Eisenach für die Seite des regelmäßigen n-Eckes sind schon 1878 von S. Günther angestellt worden (Zeitschrift für Realschulwesen, Wien, Bd. 3 (1878), S. 526 bis 533 und S. 704); ihre Ergebnisse sind auszugsweise in dem bekannten Werk Konstruktionen und Approximationen von Th. Vahlen (Leipzig u. Berlin 1911) auf S. 302 ff. wiedergegeben. Die Güntherschen Fehlerkurven wurden nachgeprüft und teilweise berichtigt von H. J. Fischer und Kurt Schmeiser (Untersuchungen zur angenäherten Kreisteilung, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, 1934, 18. Abhandlung).

In der zuletzt genannten Arbeit von H. J. Fischer und K. Schmeiser wird auch eine im Jahre 1931 von dem Lehrer Jakob Klee angegebene sehr einfache Näherungskonstruktion zur Teilung des Viertelkreises in beliebig vorgegebenem Verhältnis auf ihre Genauigkeit untersucht. Das Fehlermaximum liegt bei ihr zwischen 86″ und 87″, d. h. der Abstand zwischen wahrem und konstruiertem Teilpunkt auf der Kreislinie kann maximal erst dann 1 mm groß werden, wenn der Durchmesser des geteilten Kreises 4,80 m lang ist! Benutzt man die Kleesche Konstruktion insbesondere zur Bestimmung des Mittelpunktwinkels des regelmäßigen n-Eckes, so liefert sie in mancherlei Hinsicht viel bessere Ergebnisse als die Methoden von Rinaldini und Karl Bernhard von Sachsen-Weimar-Eisenach. Beide weisen ein weit größeres Fehlermaximum von mehreren Minuten auf. Das Produkt $n\varphi_n$ aus Seitenzahl n und konstruiertem Mittelpunktwinkel φ_n strebt, falls n gegen Unendlich geht, bei Rinaldini gegen 396° 57′ 24″, bei Karl Bernhard gegen 362° 22′ 12″, bei Klee gegen 360° 32′ 30″, d. h. beinahe gegen den Sollwert 360° 00′ 00″. Der relative Fehler ist für große n bei der Kleeschen Konstruktion also besonders klein. Sie verdient deshalb durchaus, neben den beiden älteren Konstruktionen genannt zu werden.

Da die Kleesche Konstruktion nicht allgemein bekannt sein dürfte, sei sie hier kurz beschrieben:

BAC sei der gegebene rechte Winkel,

$$AD : DB = s : t$$

das vorgeschriebene Streckenverhältnis. In B und D werden Lote auf AB errichtet; DE wird gleich DB, der Winkel BDG gleich $\frac{\pi}{8}$ gemacht. Dann

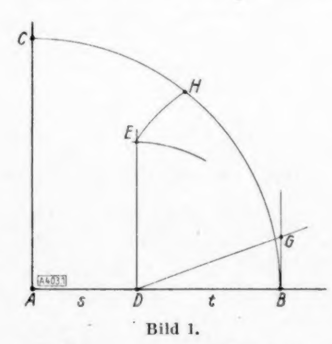


Bild 1.

liefert der Kreis um G mit dem Radius EG den gesuchten Näherungsteilpunkt H, d. h. der Punkt H teilt den Viertelkreis BC mit der obengenannten Genauigkeit im Verhältnis $s : t$.

Tübingen. Max Müller

2. Es liegt nahe, durch eine kleine Änderung der Rinaldinischen Regel dafür zu sorgen, daß die stark verschiedenen positiven und negativen Höchstwerte von $\Delta\alpha$ gleich werden. Dies ist zu erreichen, wenn man die Abstände $MO = MP$ statt $= r\,\mathrm{tg}\,60^\circ$ nun $= r\,\mathrm{tg}\,\gamma$ macht, wo γ etwas kleiner als 60° ist. Der Fehler $\Delta\alpha$ berechnet sich dann nach der Formel

$$\cos(\alpha + \Delta\alpha) = z\,\frac{\mathrm{tg}^2\gamma + \sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma\,(1 - z^2) + z^2}}{\mathrm{tg}^2\gamma + z^2}.$$

Für $\gamma = 59^\circ\,12{,}2'$ schwanken die Fehler $\Delta\alpha$ zwischen $+19\frac{1}{2}'$ und $-19\frac{1}{2}'$. Legt man Wert darauf, daß die Konstruktion mit Zirkel und Lineal allein ausführbar bleibt, so kann man $\gamma = 59^\circ\,8{,}9'$ wählen, wodurch die Entfernungen der Punkte O und P von $A = \left(2 - \frac{1}{20}\right) r$ werden.

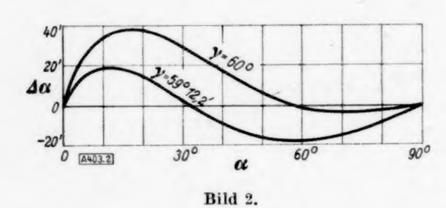


Bild 2.

Die Fehler $\Delta\alpha$ liegen dann zwischen $+18\frac{1}{2}'$ und $-20\frac{1}{2}'$. Das Bild 2 zeigt den Verlauf der Fehlerkurven für $\Delta\alpha$ als Funktion von α für die beiden Fälle $\gamma = 60^\circ$ und $\gamma = 59^\circ\,12{,}2'$.

Sind also Fehler des Zentrierwinkels α bis zu Höchstwerten von $\pm 20'$ zulässig, was bei kleinen n-Werten öfter der Fall sein wird, so könnte die in der angegebenen Weise veränderte Rinaldinische Regel ohne weiteres benutzt werden.

Berlin. H. Maurer. 403

Die Zuschriften haben Herrn Peineke vorgelegen.

Berichtigungen.

D. Küchemann, **Bemerkung über den Einfluß des Seitenverhältnisses auf den Zusammenhang von Normalkraft und Tangentialkraft eines Tragflügels.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 290 bis 291.

Herr Prof. Tollmien hat mich freundlicherweise auf ein Versehen in der obigen Mitteilung aufmerksam gemacht, das ich hiermit berichtigen möchte.

Ich habe bei der Ableitung stillschweigend vorausgesetzt, daß die Flügelsehne in der Nullauftriebsrichtung des Profils liegt und Tangential- und Normalkraft parallel bzw. senkrecht zu dieser Richtung definiert. Da jedoch in der Praxis der Profilmessungen die Sehne meist nach geometrischen Gesichtspunkten gewählt wird, trifft die gemachte Voraussetzung im allgemeinen nur bei symmetrischen Profilen zu. Es ist daher zweckmäßig, den Winkel α_0 zwischen geometrischer Sehne und Nullauftriebsrichtung einzuführen. In Gl. (1) ist statt α dann $\alpha - \alpha_0$ zu setzen, während in den Gl. (2) und (3) auf der rechten Seite ein Glied $-c_n \cdot \alpha_0$ hinzukommt. Die Gültigkeit des aufgestellten Satzes sowie die allgemeinen Überlegungen dazu werden also durch den neuen Zusatz nicht berührt.

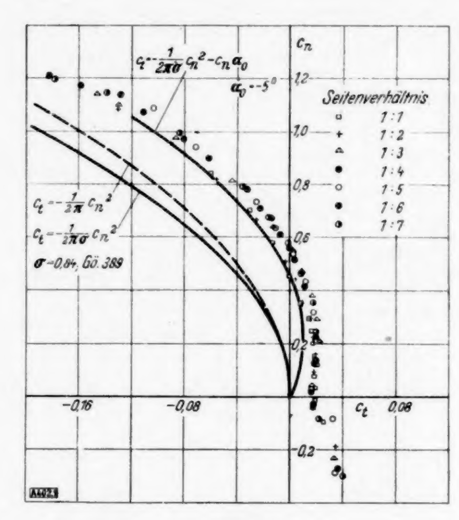


Bild 1.

— Bei dem in Bild 1 verwandten Profil Gö 389 beträgt α_0 etwa -5°. Die Differenz zwischen den früher eingetragenen theoretischen und den gemessenen Werten ist also nicht der Profilwiderstand. In die dieser Berichtigung beigefügten Abbildung ist die vollständige theoretische Beziehung eingetragen, wobei die Konstanz des Profilwiderstandes in einem großen Anstellwinkelbereich gut herauskommt.

Göttingen. D. Küchemann. 402

P. und E. Brauer, **Über unvollständige Anger-Webersche Funktionen.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 177.

Herr Prof. Dr. Hugo Kasper, Brünn, wies uns freundlicherweise auf eine Unstimmigkeit hin, welche ihre Ursache in einer durch Schreibfehler entstellten Gl. (1) hat. Diese Ausgangsgleichung muß richtig lauten:

$$K = r\cos\sigma - p \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

424

Wilh. Müller, **Beitrag zur Theorie der langsamen Strömung zweier exzentrischer Kreiszylinder in der zähen Flüssigkeit.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 177—189.

Der Titel der Arbeit soll lauten: „Beitrag zur Theorie der langsamen Drehung zweier exzentrischer Kreiszylinder in der zähen Flüssigkeit."

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.